Ali Nesin

Matematik ve Gerçek

FELSEFİ TATTA MATEMATİK YAZILARI

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



Ali Nesin

1956'da İstanbul'da doğdu. İlkokuldan sonra ortaokulu İstanbul'da Saint Joseph Lisesi'nde, liseyi de İsviçre'nin Lozan kentinde tamamlayan Nesin, 1977-1981 yılları arasında Paris VII Üniversitesi'nde matematik öğrenimi gördü. Daha sonra ABD'de Yale Üniversitesi'nde matematiksel mantık ve cebir konularında doktorasını aldı. 1985'te UC Berkeley'de doktora sonrası çalışmalarını yaparken kısa dönem askerlik görevi için yurda döndü ancak "orduyu isyana teşvik" suçlamasıyla tutuklanarak yargılandı. Yargılama sonunda beraat ettiği halde pasaport verilmediği için Berkeley'deki işine dönemeyen Nesin, ancak bir buçuk yıl sonra yurtdışına gidebildi. 1987-89 arasında Notre Dame Üniversitesi'nde ziyaretçi yardımcı doçent, ardından 1995'e kadar UC Irvine'da önce yardımcı doçent, sonra doçent ve daha sonra profesör olarak görev yaptı.

1995'te Türkiye'ye dönüp Nesin Vakfı'nın yöneticisi oldu. 1996'da İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde Matematik Bölümü'nü kurdu ve 2011'e kadar Bölüm Başkanlığı görevini yürüttü. 2003-2013 arasında Matematik Dünyası dergisinin sorumluluğunu üstlendi. 2007'de Matematik Köyü'nü kurdu. 40'a yakın bilimsel makalenin yanısıra, biri İngilizce olmak üzere popüler, yarı akademik ve akademik düzeyde 20 dolayında matematik kitabı yazdı.

Halen İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü'nde öğretim üyesidir.

Nesin Yayıncılık A.Ş.
Eskişehir Mah. Dolapdere Cad. Şahin Sok. No: 84/A-C Şişli/İstanbul
Tel: 0212 291 49 89 ● Faks: 0212 234 17 77
nesin@nesinyayinevi.com ● www.nesinyayinevi.com

Ali Nesin
Matematik ve Gerçek

Şubat 2009-Ağustos 2016 arasında 9 kez, toplam 9 bin 500 adet basılmıştır.
Onuncu basım Haziran 2017 (1000 adet)

Popüler Matematik Kitapları
Tematik Derleme:1
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 8

NY.83
ISBN 978-605-5794-07-1
Sertifika No: 18231

Dizi editörü
Ali Nesin

Kapak düzeni
İlhan Bilge

Dizgi ve iç sayfa tasarımı
Aslı Can Korkmaz

Redaksiyon
Çiçek Eriş

Baskı ve cilt
Yazın Basın Yayın Matbaacılık Turizm Tic. Ltd. Şti.
İkitelli Çevre Sanayi Sitesi 8. Blok No:38-44 Başakşehir/İstanbul
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

Ali Nesin

Matematik ve Gerçek

NESİN MATEMATİK  KÖYÜ

İçindekiler

Önsöz

Bu kitapta, matematikle gerçek, soyutla somut, teoriyle pratik, doğruyla kanıtlanabilirlik arasındaki ilişkiyi, paradoksal görünenle paradoksun ayrımını, sonsuzluk kavramının getirdiği sorunları, var olmanın ve gerçeğin anlamını ve matematiğin sınırlarını irdeleyen, dolayısıyla kaçınılmaz olarak felsefi tadı olan matematiksel yazıları bulacaksınız. Matematiksel düzeyi fazla yükseltmemek için konunun hakettiği derinliğe inmedim. Matematiksel olarak daha derin ve daha doyurucu yazıları, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, **Sayıların İnşası** ve **Aksiyomatik Kümeler Kuramı** adlı kitaplarımda bulabilirsiniz.

Amaç, İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde geniş bir öğrenci kitlesine verilecek bir matematik dersinin okuma metinlerini oluşturmaktı. (Elinizdeki bu amaçla oluşturulmuş üç kitaptan biridir.) Konuyla ilgili ve birbirinden bağımsız yazılmış çeşitli kitap ve dergilerde çıkan yazılarımı derledim. Yazılarla biraz oynayarak elimden geldiğince bütünlüğü sağlamaya çalıştım. Okur, ilk okuyuşta anlayamadığı yazıları daha sonra geri dönmek üzere atlayabilir.

Yazılarını buraya almamda sakınca görmeyen Prof. Dr. Cem Say'a ve İhsan Yücel'e, Lewis Carroll'un bir yazısını İngilizceden çeviren Aslı Nesin'e, kitabın mizanpajına büyük emek veren Aslı Can Korkmaz'a müteşekkirim.

Ali Nesin

Matematik ve Özgürlük

Hareketlerimizde ve aldığımız kararlarda gerçekten özgür müyüz? Yoksa ayrımına varmadığımız bir gücün, örneğin birtakım alışkanlıkların etkisi altında mıyız? Birkaç örnek verdikten sonra konuya matematiksel (ve biraz da kaçınılmaz olarak felsefi) yönden eğileceğim.

Dört İstek. Konuya girmeden önce sizden birkaç isteğim olacak:

1. Ayağa kalkın ve el bileğinizi tutun.
2. El tırnaklarınıza bakın.
3. Ayağa kalkıp topuğunuza bakın.
4. Eşinizle, nişanlınızla, sözlünüzle, karşı cinsten sevdiğiniz biriyle elele tutuşup biraz yürüyün.

Şimdi size ne yaptığınızı söyleyeceğim:

1. Sol bileğinizi tuttunuz.
2. Eğer erkekseniz, tırnaklarınıza bakmak için parmaklarınızı avcunuzun içine kıvırdınız. Eğer kadınsanız, parmaklarınızı yayıp elinizin tersine baktınız.
3. Eğer erkekseniz topuğunuza bakmak için öne eğildiniz. Eğer kadınsanız topuğunuzu arkadan kaldırıp arkaya doğru eğildiniz.
4. Eğer erkekseniz diğer kişinin elini önden kavramışsınızdır, yani elinizin tersi yürüdüğünüz yöne bakar. Eğer kadınsanız, avcunuz yürüdüğünüz yöne bakar ve erkek avcunuzu önden kavramıştır.

Tahminlerim muhtemelen doğru çıkmıştır. Bu tahminlerim sizi şaşırtmamış olabilir. Örneğin, insanlar genellikle sağak ol-

duklarından, sol bileklerini tuttuklarını anlamışsınızdır. Amacım kimseyi şaşırtmak değildi zaten. Amacım, rastgele gelebilecek seçimlerin kimileyin bir kurala uyduklarını göstermekti.

Yıllar önce erkeklerin sigarayı ağızlarının solunda, kadınlarınsa sağında tuttuklarını duymuştum. Gözlemlerim de bu yöndeydi.

Uygulamada hiçbir işe yarayacağına inanmadığım bu gözlemlerden sonra uygulamaya geçirilebilecek bir örnek vereyim.

Tüketici Psikolojisi. Yıllar önce Amerika'da tüketici psikolojisine dair bir makale okumuştum. Birbirine hemen hemen eşdeğer olan iki tüketim maddesini ele almış araştırmacılar. Örneğin *The New York Times* ve *The Washington Post* gibi iki ciddi gazete, *Time* ve *Newsweek* gibi iki haftalık haber dergisi, *Pepsi Cola* ve *Coca Cola* gibi iki gazlı içecek, *Playboy* ve *Penthouse* gibi iki aylık "erkek dergisi"... Birbirine çok benzeyen bu iki ürünü bir dükkânda, ortalık bir yerde sergilemişler. Ancak iki üründen birinden yüzlerce, öbüründense on yirmi tane kadar, yani az sayıda sergilemişler. Ürünler satıldıkça yerine yenilerini koymuşlar. Gün sonunda, çok sayıda sergilenen ürünün daha çok satılmış olduğu saptanmış.

Amerika için geçerli olan bu gözlem bir başka ülke için geçerli olmayabilir. Örneğin, Türkiye'de bunun tam tersi olabilir, "kalmayacak" korkusuyla insanlar az sergilenen ürünü daha çok alabilirler. Hatta deneyin sonucu, şehirden şehire, yaş grubundan yaş grubuna göre bile değişebilir. Gene de, bu deneyden, aynı ortamda yetişmiş ve aynı ortamda yaşayan insanların davranışlarının ve kararlarının birbirine benzediği ortaya çıkıyor. Zaten böyle benzeşme olmasaydı toplumbilim ya da toplum psikolojisi gibi bilim dalları olmazdı herhalde.

En Çok Tutulan Sayılar. Çocukların oynadıkları bir oyun vardır. İki çocuktan biri, örneğin, 1'le 100 arasında bir sayı tutar. Öbür çocuk, "50'den büyük mü", "68'le 83 arasında mı" gibi sorular sorarak tutulan sayıyı bulmaya çalışır. Sonra roller değişir, bu kez öbür çocuk 1'le 100 arasında bir sayı tutar. Tutulan sayıyı en çabuk bulan çocuk oyunu kazanır.

Bu oyunun stratejisi oldukça açıktır: sayılar ortadan ikiye bölünür. Örneğin ilk soru "50'den büyük mü" olabilir. Eğer yanıt evetse, ikinci soru "75'ten büyük mü" olabilir... Bu yöntemle, tutulan sayı en çok 7 soruda bulunur.

Ama diyelim ki çocuklardan biri öbür çocuğun yüzde 90 olasılıkla 40'la 60 arasında bir sayı tuttuğunu biliyor. O zaman ilk sorusu "40'la 60 arasında mı" olursa, oyunu kazanma olasılığı artar.

Yıllar önce, bir dersimde, hangi sayının yüzde kaç olasılıkla tutulduğu bilindiğinde bu oyunun en iyi stratejisinin nasıl bulunduğunu anlatacaktım. Derse biraz tat vermek için sınıfa bir şapkayla girdim. Öğrencilerden küçük bir kâğıda 1'le 10 arasında bir sayı yazıp şapkaya atmalarını istedim. Anlatacağım konuyu daha önce bilmediklerinden bu isteğime bir anlam veremediler ama yerine getirdiler.

Yüz elli dolayında öğrenci vardı sınıfta. Her sayının seçilme olasılığı 1/10 olduğundan, her sayı aşağı yukarı 15 kez seçilmeliydi. Bunu öğrencilerime anlattım. Kimse karşı çıkmadı, herkes aynı düşüncedeydi.

– Ama, diye ekledim, göreceğiz ki, en çok 7 seçilecek!

Şapkayı bir masaya boşalttık. Bir öğrenci seçilen sayıları teker teker okudu. Ben de bu sayıları karatahtaya yazdım. Tahmin ettiğim gibi öğrencilerin (aklımda yanlış kalmadıysa) aşağı yukarı yüzde otuzu 7'yi seçmişti. Yüzde ondan çok daha büyük bir yüzde...

Hangi sayının hangi sıklıkta seçildiğini gözlemledikten sonra 1'le 10 arasında tutulan bir sayıyı bulma oyununun en iyi stratejisini bulduk.

Bir başka ülkede başka sonuç bulunabilir. Ama sanırım aynı ortamda, benzer koşullarda yetişmiş insanlar kimi sayıları öbür sayılara yeğleyeceklerdir.

Diyelim size benzeyen insanlar arasında (aynı yaş grubundan ve cinsiyetten, benzer eğitimden geçmiş insanlar arasında) bir anket yapılıyor. Bu kişilerden 8 ve 9 rakamlarından birini seçmeleri isteniyor. Diyelim bu insanların yüzde 80'i 9'u seçti. Bundan sizin de büyük bir olasılıkla 9'u seçeceğiniz çıkmaz mı?

İnsanlara sorulan soru, "Kendinizi pencereden atacak mısınız" olsa, elbet çoğunluk "hayır" yanıtını verir. Ama insanlardan istenen iki sayıdan birini seçmeleri. İnsanların bir sayıyı öbürüne yeğlemeleri için görünürde bir neden yok. Ama sayılardan biri öbürüne yeğleniyor. Bu durumda gerçekten özgür olduğumuz söylenebilir mi?

Newcomb'un Oyunu. 1960'da Amerikalı fizikçi William Newcomb şu oyunu ortaya atar: Önünüzde içini göremediğiniz iki kapalı kutu duruyor. Birinci kutuda 1 lira var. İkinci kutu ya boş ya da içinde 100 lira var. İki seçeneğiniz var:

1. Her iki kutuyu birden açabilirsiniz ve kutularda bulduğunuz paralar (ya 1 ya da 101 lira) sizin olur.

2. Salt ikinci kutuyu açabilirsiniz. Kutuda para varsa (100 lira) parayı cebinize atarsınız. Kutuda para yoksa hava alırsınız.

Hangi seçeneği seçmelisiniz? İki kutuyu birden mi, yoksa salt ikinci kutuyu mu açmalısınız?

İki kutuyu birden açmalısınız elbet. Bunun hiçbir zararı olmadığı gibi yararı da vardır. İkinci kutuda para olsa da olmasa da, her iki kutuyu birden açarak, ikinci kutunun içindeki paradan başka, birinci kutudaki 1 lirayı da kazanırsınız. Geçerli bir neden olmadan 1 lirayı reddetmek doğru olmaz. Bunun pintilikle bir ilgisi yok. Mantıkla ilgisi var.

Ama Newcomb'un oyunu bu kadarla kalmıyor. Newcomb bize bir bilgi daha veriyor. **Bir gün önce**, geleceği yüzde doksan doğrulukta görebilen olağanüstü yetili bir varlık, hangi seçeneği seçeceğinizi öngörüyor. Salt ikinci kutuyu açacağınızı öngörmüşse ikinci kutuya 100 lira koyuyor. Her iki kutuyu birden açacağınızı öngörmüşse, ikinci kutuyu boş bırakıyor. Bu bilgiyle hangi seçeneği seçmelisiniz? Her iki kutuyu birden mi açmalısınız, yoksa salt ikinci kutuyu mu?

Geleceği görebilen olağanüstü varlık Tanrı olabilir. İlla mükemmel bir Tanrı olması da gerekmez, yüzde 10 hata yapabilen bir Tanrı da olabilir. Ya da sizi çok iyi tanıyan biri olabilir, örneğin, anneniz, babanız, eşiniz, bir psikolog... Bu varlık, sizin böyle bir oyunda ne seçeceğinizi yüzde 90, yüzde 60, o da olmadı, yüzde 51 olasılıkla öngörebilir.

Varlık'ın yüzde 90 doğru öngördüğünü varsayalım.

Bir an için, her iki kutuyu birden açtığımızı düşünelim. Varlık her iki kutuyu birden açacağımızı öngörmüşse, yalnızca 100 lira kazanırız. Ama Varlık öngörüsünde yanılmışsa, o zaman 101 lira kazanırız.

Salt ikinci kutuyu açtığımızı varsayalım şimdi de. Varlık salt ikinci kutuyu açacağımızı öngörmüşse 100 lira kazanırız. Varlık öngörüsünde yanılmışsa, yani her iki kutuyu birden açacağımızı sanmışsa, hiç para kazanamayız.

Bunu Varlık'la oynadığımız bir oyun olarak görebiliriz. Oyunumuz iki hamlelik bir oyun. İlk hamleyi Varlık yapıyor. İkinci (ve son) hamleyi de biz. Oyunu bir şemayla gösterelim:

	Varlık iki kutuyu birden açacağımızı öngörüyor	Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağımızı öngörüyor
İki kutuyu birden açıyoruz	1 TL	101 TL
Yalnızca ikinci kutuyu açıyoruz	0 TL	100 TL

Bu oyunu nasıl oynarsınız? Varlık hamlesini yaptı. Sıra sizde... İki kutuyu birden mi açmalısınız, yoksa salt ikinci kutuyu mu?[1]

Birinci Yanıt. "İki kutuyu birden açarsam, Varlık bunu büyük bir olasılıkla öngörmüş olacak, dolayısıyla yalnızca 1 lira kazanacağım. Ama yalnızca ikinci kutuyu açarsam, Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağımı yüzde doksan olasılıkla öngörmüş olacağından büyük bir olasılıkla 100 lira kazanacağım. Demek ki yalnızca ikinci kutuyu açmalıyım."

İkinci Yanıt. "Varlık öngörüsünü dün yaptı. Bugün alacağım karar ne bu öngörüyü ne de kutudaki paraları değiştirecek. Dolayısıyla istediğim kararı almakta özgürüm. Her iki kutuyu

[1]Hangi stratejiyi seçeceğimizi yazı-tura atarak karar versek ne olur? [Robert Nozick, *Newcomb's Problem and Two Principles of Choice*, **Essays in Honor of Carl G. Hempel'da**, editör: Nicholas Rescher, Atlantic Highlands, New Jersey, Humanities Press, 1970]'de problemi sunarken, Varlık yazı-tura atacağımızı öngörürse, ikinci kutuyu boş bırakacağını söylüyor.

birden açarak, ikinci kutudaki paradan başka (varsa elbet), birinci kutudaki 1 lirayı da cebime indiririm. Yukarıdaki oyun şeması da iki kutuyu almanın daha doğru olduğunu söylüyor zaten: Birinci sıradaki sayılar ikinci sıradaki sayılardan daha büyük. İkinci kutuda para olsa da olmasa da, yani Varlık'ın hamlesi ne olursa olsun, her iki kutuyu birden açarak daha çok para kazanırım."

Hangi Yanıt Doğru? Filozoflar ve matematikçiler hangi yanıtın doğru olduğu konusunda anlaşamıyorlar. Her iki yanıt da savunulabilir.

Beklenti. Birinci yanıt "beklenti" ilkesine dayanıyor. Varlık'ın yüzde doksan doğru öngördüğünü varsayarak, her iki hamlemizin de beklentisini hesaplayalım. Önce her iki kutuyu da açtığımız duruma bakalım:

%90	olasılıkla Varlık iki kutuyu birden açacağımızı öngörüyor ve	1 lira kazanıyoruz
%10	olasılıkla Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağımızı öngörüyor	101 lira kazanıyoruz

Beklentimiz bu durumda

$$\left(\frac{90}{100}\right) \times 1 + \left(\frac{10}{100}\right) \times 101 = 11$$

liradır. Şimdi yalnızca ikinci kutuyu açtığımız duruma bakalım:

%10	olasılıkla Varlık iki kutuyu birden açacağımızı öngörüyor ve	0 lira kazanıyoruz
%90	olasılıkla Varlık salt ikinci kutuyu açacağımızı öngörüyor ve	100 lira kazanıyoruz

Beklentimiz bu durumda

$$\left(\frac{10}{100}\right) \times 0 + \left(\frac{90}{100}\right) \times 100 = 90$$

liradır. İkinci beklenti birincisinden daha fazla olduğundan, hatta arada bayağı bir fark olduğundan, ikinci seçeneği seçmeliyiz,

yani salt ikinci kutuyu açmalıyız. Demek ki birinci yanıt doğrudur.

Varlık'ın doğru öngörme oranı, yüzde 90 gibi yüksek bir sayı olacağına yüzde 51 bile olsa, salt ikinci kutuyu açmanın beklentisi, her iki kutuyu da açma beklentisinden daha yüksek çıkar. Demek ki, Varlık'ın doğru öngörme oranı yüzde 50'den biraz yüksek bile olsa (yüzde $100 \times 101/201 \approx 50,0248756$'dan büyükse), beklenti yöntemi salt ikinci kutuyu açmamız gerektiğini söylüyor.

Üstünlük İlkesi. İkinci yanıt üstünlük ilkesine dayanıyor: Oyunun şemasına bakalım. Aşağıya bir defa daha aldığımız bu şemada, birinci sıranın sayıları hemen alttaki sayılardan daha büyük (daha üstün) olduğundan, her iki kutuyu birden açmalıyız. Her iki kutuyu açmak, yalnızca ikinci kutuyu açmaktan daha **üstün** bir stratejidir.

	Varlık iki kutuyu birden açacağımızı öngörüyor	Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağımızı öngörüyor
İki kutuyu birden açıyoruz	100 TL	101 TL
Yalnızca ikinci kutuyu açıyoruz	0 TL	100 TL

Bu stratejinin doğru olduğu şöyle de anlaşılabilir: Birinci kutu saydam olsun ve içindeki 1 lirayı görelim. İkinci kutunun sadece arka tarafı saydam olsun. Kutuların arkasına güvendiğimiz bir arkadaşımızı koyalım. Eğer ikinci kutu boşsa, bu güvendiğimiz arkadaş birinci kutudaki 1 lirayı kazanmamızı istediğinden, her iki kutuyu birden açmamızı önerecektir. Eğer ikinci kutu boş değilse, bu arkadaş gene her iki kutuyu birden açmamızı isteyecektir, çünkü arkadaşımız bizim iyiliğimizi istediğinden 100 yerine 101 lira kazanmamızı isteyecektir.

Hatta hile yapıp kutuların içini gördüğümüzü varsayalım. İkinci kutunun içinde para olsa da olmasa da, daha çok para kazanmak için her iki kutuyu birden açmak isteriz. Hile yaparak iki kutuyu açmak gerektiğini anlamışsak, hile yapmadan da iki kutuyu birden açmak gerektiğini anlarız.

Sonuç. Dediğim gibi, hangi stratejinin doğru olduğu konusunda matematikçiler ve filozoflar anlaşamıyorlar. Kimine göre beklenti ilkesini uygulayıp iki kutuyu birden açmalıyız, kimine göreyse üstünlük ilkesini uygulayıp ikinci kutuyu açmalıyız. Kimi de, bu soruya ne beklenti yönteminin ne de üstünlük ilkesinin uygulanabileceğini savunuyor.

Genellikle hareketlerinde özgür olduklarına inanan insanlar her iki kutuyu birden açmanın en iyi strateji olduğunu düşünüyorlar. Örneğin Jean-Paul Sartre sağ olsa ve Sartre'ın yaşam arkadaşı Simone de Beauvoire bu oyunu Sartre'a oynatsa, özgür olduğuna inanan ve yapıtlarında bunu durmadan savunan Sartre, biraz düşününce her iki kutuyu birden açmak isteyecektir. Simone de Beauvoire ise, Sartre'ı iyi tanıdığından, Sartre'ın bu stratejiyi seçeceğini öngörecek ve ikinci kutuyu boş bırakacaktır! Dolayısıyla özgür olduğuna inananlar (ve Varlık'a bunu belli edenler!) Varlık tarafından cezalandırılacaklardır!

"Öyle bir Varlık olamaz" demek çelişkiyi çözmez. Çünkü, geleceği yüzde doksan görebilen bir Varlık olmasa bile, bizi çok iyi tanıyan ve bu oyunu nasıl oynayacağımızı en az yüzde 51 olasılıkla öngörebilen bir insan vardır elbette.

Ben Ne Düşünüyorum? Bu oyunu oynayana dek, hangi stratejiden yana olduğumdan pek emin değildim. Oyunu bir kez oynadım (bu yazıyı yazdıktan ve bu kitabın ikinci basımından çok daha sonra). Ben "Tanrı" oldum ve çok yakın bir arkadaşım seçim yaptı. Tahmin ettiğim gibi arkadaşım her iki kutuyu birden açtı. Her iki kutuyu birden açması gerekirdi elbet!

Bu oyunu oynasam, her iki kutuyu birden açarım. Beni tanıyan bir Varlık, her iki kutuyu açacağımı öngörür ve ikinci kutuyu boş bulurum! Gene de sağım solum belli olmaz, son anda yalnızca ikinci kutuyu açmaya karar verebilirim. Ve beş kuruş para kazanamam!

Sayılar Biri Sever!

Pozitif bir tamsayı 1'den 9'a kadar olan bir rakamla başlar, ya 1'le ya 2'yle ya 3'le .... ya da 9'la[1]. Dolayısıyla, rastgele bir sayının 5'le başlama olasılığıyla 6'yla başlama olasılığı aynıdır. Her ikisi de 1/9'dur.

Elbet, rastgele bir sayının 1'le başlama olasılığı da 1/9'dur.

"Rastgele sayının" anlamını bilmiyorum ama her neyse anlamı öyle olmalı.

Ama bakalım gerçek böyle mi?

Elimin altındaki gazeteyi açtım. 5 Mart 1997 borsasının kapanış fiyatlarına baktım. Bu sayılar aşağı yukarı rastgele olmalı. Üşenmeden kaç sayının 1'le, 2'yle, ..., 9'la başladığını hesapladım. İşte hesabımın sonuçları:

1'le 76 sayı başlamış
2'yle 29 sayı başlamış
3'le 36 sayı başlamış
4'le 17 sayı başlamış
5'le 17 sayı başlamış
6'yla 18 sayı başlamış
7'yle 10 sayı başlamış
8'le 10 sayı başlamış
9'la 12 sayı başlamış.

Tuhaf... 1'le başlayan sayılar çoğunlukta. Oysa bir sayının 1'le daha çok başlaması için görünürde hiçbir neden yok.

[1] Bu yazıda, "sayı" sözcüğünü, $1, 2, 3, \ldots$ gibi "pozitif tamsayı" anlamına kullanacağız.

Sonra aynı günün borsasının işlem hacimlerine (her ne demekse!) baktım:

1'le 66 sayı başlamış
2'yle 33 sayı başlamış
3'le 32 sayı başlamış
4'le 21 sayı başlamış
5'le 13 sayı başlamış
6'yla 20 sayı başlamış
7'yle 17 sayı başlamış
8'le 9 sayı başlamış
9'la 10 sayı başlamış.

Nedense gene 1'le daha çok sayı başlamış. Bir rastlantı mı acaba?

Ayrıca, rakam büyüdükçe, o rakamla başlayan sayı sayısı azalıyor.

Kitaplığımda 1951 basımlı bir Amerikan atlası var. Atlasta ülkelerin, belli başlı kent ve adaların ve Amerikan eyaletlerinin yüzölçümleri (metrekare olarak değil milkare olarak) ve nüfusları verilmiş. Bu sayılar da rastgele değilse, artık ne rastgeledir bilemiyorum. Önce yüzölçümlerine baktım:

1'le 88 sayı başlamış
2'yle 52 sayı başlamış
3'le 45 sayı başlamış
4'le 41 sayı başlamış
5'le 36 sayı başlamış
6'yla 24 sayı başlamış
7'yle 21 sayı başlamış
8'le 23 sayı başlamış
9'la 25 sayı başlamış.

Sonra nüfuslara baktım:

1'le 101 sayı başlamış
2'yle 67 sayı başlamış
3'le 45 sayı başlamış
4'le 42 sayı başlamış
5'le 31 sayı başlamış

6'yla 24 sayı başlamış
7'yle 20 sayı başlamış
8'le 20 sayı başlamış
9'la 8 sayı başlamış.

Nedense sayılar 1'le başlamayı yeğliyorlar. 2'yi de seviyorlar ama en çok 1'i seviyorlar.

Sonra, aynı atlasta Amerikan eyaletlerinin en yüksek noktasının yüksekliğine baktım (feet olarak).

1'le 19 sayı başlamış
2'yle 5 sayı başlamış
3'le 6 sayı başlamış
4'le 8 sayı başlamış
5'le 5 sayı başlamış
6'yla 3 sayı başlamış
7'yle 1 sayı başlamış
8'le 3 sayı başlamış
9'la 0 sayı başlamış.

İnanılır gibi değil! 1'den nesi var?

Ne yazık ki ırmak uzunluklarını içeren bir cetvel bulamadım. Bulursanız sonuçları bana bildirin.

Galiba uygulamada rastgele bir sayının 1'le başlama olasılığı 1/9 değil, 1/9'dan daha büyük...

Bu yargı doğru mu ve doğruysa neden doğru?

Yukarıdaki sayılar aslında rastgele sayılar değil. Biz insanlar, gerçekten rastgele bir sayı seçemeyiz. Ayrıca, doğadan da gerçekten rastgele bir sayı seçilmez. Çünkü, ne bizim sayılarımız ne de doğanın sayıları sonsuzdur. Örneğin, bir insanın başındaki saç sayısı, 0'dan (atıyorum) 2 milyara kadar değişebilir ancak. Bir insanda daha fazla saç olamaz. Öyle olunca, bir insanın saç sayısı rastgele bir sayı olarak kabul edilemez.

Rastgele seçilmiş 2 milyardan küçük bir sayının 1'le başlama olasılığı yüzde elliden fazladır! Rastgele seçilmiş 5 milyardan küçük bir sayının 1'le başlama olasılığı 1/5'ten fazladır. Bu olasılıklar da 1/9'dan büyük!

Galiba işte bu yüzden yukarıdaki sayılar daha çok 1'le başlıyorlar galiba. Bir ırmağın uzunluğu, olsun olsun da 20 bin km olsun. Bir dağın yüksekliği en fazla, ne bileyim ben, 8000 metre olabilir...

Sayıların daha çok 1'le başlamasının bir başka nedeni daha olabilir. Diyelim bir ölçüm 1000'lerde seyir ediyor (dolayısıyla 1'le başlıyor) ve artıyor. Bu ölçümün 2000'e ulaşması için aşağı yukarı iki kat artması gerekir. Oysa 4000'den 5000'e çıkmak için, aynı ölçümün 1/4 kadar artması gerekmektedir (çünkü 1000, 4000'in 1/4'üdür.) Tahmin edileceği gibi, iki kat büyümek, 1/4 büyümekten daha zordur, dolayısıyla ölçümler 1'le başlayan sayılarda daha uzun süre kalırlar.

Bu da ikinci neden olabilir.

Her Şey Sıralanamaz

"Ahmet, Belgün'den daha uzun boyluysa, Belgün de Cemal'den daha uzun boyluysa, Ahmet, Cemal'den daha uzun boyludur," önermesi hiç kuşkusuz doğrudur. Çünkü $A > B$ ve $B > C$ eşitsizliklerinden, $A > C$ eşitsizliği çıkar.

Şu önermeyi ele alalım şimdi: "Ahmet, Belgün'den daha iyi satranç oynuyorsa ve Belgün de Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, Ahmet, Cemal'den daha iyi satranç oynuyordur."

Bu önerme doğru mudur? Ahmet gerçekten Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, önerme doğrudur elbet. Ama genel olarak, herhangi üç kişi için doğru mudur bu önerme? Bir başka deyişle, A, B ve C herhangi üç kişiyi simgeliyorsa, A, B'den, B de C'den daha iyi satranç oynuyorsa, A, C'den daha iyi satranç oynuyor diyebilir miyiz?

Turnuvalar hep bunu varsayar: A, B'yi yenmişse, B de C'yi yenmişse, A, C'den daha iyidir. Acaba gerçekten öyle mi?

Satranç, analizi zor bir oyun. Satranç oynamak yerine zar atalım.

Bir Zar Oyunu. A ve B diye adlandırdığımız iki zarın altı yüzünde şu sayılar yazılı olsun:

$$\begin{array}{rcccccc} A: & 1 & 4 & 5 & 7 & 9 & 12 \\ B: & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 11 \end{array}$$

Bu iki zar birbiriyle "en yüksek sayıyı atma" oyunu oynasa, hangisi daha çok kazanır, yani hangi zarın kazanma olasılığı daha yüksektir?

Bu soruyu yanıtlamak için gelebilecek zarları bir tabloyla gösterelim.

	1	4	5	7	9	12
2	B	A	A	A	A	A
3	B	A	A	A	A	A
6	B	B	B	A	A	A
8	B	B	B	B	A	A
10	B	B	B	B	B	A
11	B	B	B	B	B	A

Örneğin, A'ya 9, B'ye 3 geldiği durumu beşinci sütunla ikinci sıranın kesiştiği yerde (gölgelenmiş karede) gösterdik. A'nın B'yi yendiği zar atışlarını A ile, B'nin A'yı yendiği zar atışlarını B ile gösterdik.

Sayıldığında görüleceği gibi, B, A'yı 19 kez yeniyor. Demek ki B'nin A'yı yenme olasılığı 19/36'dır. Ve elbet, A'nın B'yi yenme olasılığı 17/36'dır[1].

Dolayısıyla iki zardan birini seçmek gerekirse B zarını seçmeliyiz, çünkü B zarıyla kazanma olasılığımızı artırmış oluruz. Hatta bu oyunu B zarıyla (A zarına karşı) 36 milyon kez oynayacak olsak, aşağı yukarı 19 milyonunda kazanırız, geriye kalan 17 milyonunda kaybederiz. Sonuç olarak B zarı A zarından daha iyidir.

Bu kez üç zarımız olsun: A, B ve C zarları. Ve zarların üstünde şu sayılar yazılı olsun:

$$\begin{array}{rrrrrrr} A: & 1 & 5 & 6 & 10 & 13 & 18 \\ B: & 2 & 3 & 7 & 11 & 16 & 17 \\ C: & 4 & 8 & 9 & 12 & 14 & 15 \end{array}$$

Bu zarlarla C, B'yi 20/36 olasılıkla yener (hesapları okura bırakıyorum.) B de A'yı 19/36 olasılıkla yener. Demek ki C zarı B zarından ve B zarı A zarından daha iyidir. En iyi zarın C olduğu sonucuna varabilir miyiz?

C'yle A'yı birbirleriyle kapıştıracak olursak, C'nin A'yı gerçekten de 21/36 olasılıkla yendiğini görürüz.

Demek C, hem A'yı hem de B'yi yeniyor. Hiç kuşku yok ki bu örnekte C en iyi zardır.

[1]Eşitlik (yenişememek) olmadığından, bu iki olasılığın toplamı 1 olmalıdır.

Birinci Soru. Öyle A, B ve C zarları var mıdır ki, A zarı B zarını yensin[2], B zarı C zarını yensin ama C zarı da A zarını yensin?

Birinci Sorunun Yanıtı. Böyle zarların olması mümkün değil diye düşündüğünüzü sanıyorum. Ne de olsa, A, B'den kuvvetliyse, B de C'den daha kuvvetliyse, A, C'den daha kuvvetli olmalı...

Doğru değil! Böyle üç zar bulabiliriz.

Üstelik zarların üstüne 18 değişik sayı koyacağız[3]?.

1'le 18 arasındaki sayıları rastgele bir biçimde A, B ve C'ye dağıtalım. Eğer şanslı bir günümüzdeysek istediğimize ulaşırız. Şansımızı deneyelim. Diyelim A, B ve C'ye şu sayıları dağıttık:

$$\begin{array}{rcccccc} A: & 3 & 5 & 8 & 12 & 14 & 16 \\ B: & 2 & 4 & 9 & 11 & 13 & 18 \\ C: & 1 & 6 & 7 & 10 & 15 & 17 \end{array}$$

Bu zarları yarıştırırsak şu sonuçları elde ederiz:-

$$\begin{array}{ll} A-B & : 19-17 \\ B-C & : 19-17 \\ C-A & : 18-18 \end{array}$$

İlk iki karşılaşma istediğimiz gibi, ama son karşılaşma istediğimiz gibi değil. C'nin A'yı yenmesini istiyorduk, oysa yenişemediler. Demek ki C'yi güçlendirip A'yı zayıflatmamız gerekir. A'nın büyük bir sayısını C'nin küçük bir sayısıyla değiştirirsek istediğimiz olur ama o zaman da $A-B$ ve $B-C$ sonuçlarını değiştirebiliriz... Bunu engellemeliyiz ama nası? A'nın hangi büyük sayısıyla C'nin hangi küçük sayısını değiştirelim ki, $A-B$ ve $B-C$ karşılaşmaları (yani B'nin yaptığı karşılaşmalar) bu değişimden etkilenmesinler? A'nın 8'iyle C'nin 7'sini değiştirirsek, hem C güçlenmiş olur, hem A zayıflamış olur, hem de $A-B$ ve $B-C$ karşılaşmaları bu değişimden etkilenmezler!

---

[2]Olasılık olarak sözediyoruz burada elbet. Yani A'nın B'yi yenme olasılığı 1/2'den büyük olsun.

[3]Eğer böyle 18 değişik sayı varsa, dilersek bu sayıları 1'den 18'e kadar alabiliriz.

Çünkü B'nin bir sayısı 7'den küçükse, 8'den de küçüktür; 8'den küçükse 7'den de küçüktür... Dediğimiz gibi yapalım ve 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim:

$$\begin{array}{lcccccc} A: & 3 & 5 & 7 & 12 & 14 & 16 \\ B: & 2 & 4 & 9 & 11 & 13 & 18 \\ C: & 1 & 6 & 8 & 10 & 15 & 17 \end{array}$$

Bu yeni zarlarda $A - B$, $B - C$ ve $C - A$ karşılaşmaları hep aynı sonuçla, $19 - 17$ biter. İstediğimiz gibi A, B, C zarı bulduk.

Okur herhalde ilk denememdeki A, B, C zarlarını rastgele bulduğuma inanmıyor ve bu zarları nasıl elde ettiğimi soruyordur. Okur inanmamakta haklı. İlk zarları nasıl bulduğumu anlatayım.

Herhangi iki zarın, $5-6$, $7-8$ gibi ardışık iki sayıyı paylaşmaları işime gelir. Hatta bunun bir değil iki ardışık sayı çifti için böyle olması daha iyi olur. Gerekirse birini, gerekirse diğerini güçlendirmek için kullanırım. Böylece yanlışı gidermem kolay olur, çünkü böylece diğer iki karşılaşmanın sonucunu değiştirmeden istediğim karşılaşmanın sonucunu istediğim yönde değiştirebilirim. Bunu biliyorum. Dolayısıyla ilk denememde bunu sağlamaya çalışmalıyım. Sayıları zarlara şöyle dağıtalım:

B:						18
C:					15	17
A:	1			12	14	16
B:	2	4		11	13	
C:	3	5	7	10		
A:		6	8			
B:			9			

Yani şöyle:

$$\begin{array}{lcccccc} A: & 1 & 6 & 8 & 12 & 14 & 16 \\ B: & 2 & 4 & 9 & 11 & 13 & 18 \\ C: & 3 & 5 & 7 & 10 & 15 & 17 \end{array}$$

Bu zarlar aralarında oynarlarsa her karşılaşma $18 - 18$ berabere biter. Oysa ben örneğin A'nın B'yi yenmesini istiyorum.

1'le 2'nin yerlerini değiştirirsem, A'yı güçlendiririm, B'yi zayıflatırım ve C'nin sonuçlarını değiştirmem. Bu değiştirmeyi yapacak olursam $A-B$ karşılaşması istediğim gibi biter ve $B-C$ ve $A-C$ karşılaşmalarında bir değişiklik olmaz.

$B-C$ karşılaşmasını B'ye kazandırtmak için 4'le 5'in yerlerini değiştireyim. Böylece $B-C$ karşılaşmasını B kazanır ve $A-B$ karşılaşmasını hâlâ A kazanır, hem de aynı sonuçla.

Son olarak, $C-A$ karşılaşmasını C'ye kazandırtmak için 7'yle 8'in yerlerini değiştirebilirim. Sonuç olarak şu zarları elde ederim:

$$\begin{array}{lrrrrrr} A: & 2 & 6 & 7 & 12 & 14 & 16 \\ B: & 1 & 5 & 9 & 11 & 13 & 18 \\ C: & 3 & 4 & 8 & 10 & 15 & 17 \end{array}$$

Ve şu sonuçları elde ederiz:

$$\begin{array}{lcl} A-B & : & 19-17 \\ B-C & : & 19-17 \\ C-A & : & 19-17 \end{array}$$

İstediğimiz de buydu zaten. Üstelik her üç zarın ortalama sayısı aynı: $57/6 = 9,5$.

İkinci Soru. Aynı şeyi dört zarla yapmaya çalışalım. Üstlerinde 1'den 24'e kadar tüm sayıların bulunduğu öyle dört A, B, C, D zarı bulalım ki $A-B$, $B-C$, $C-D$ ve $D-A$ karşılaşmalarının sonucu $19-17$ olsun. Ayrıca $A-C$ ve $B-D$ karşılaşmalarının sonucu $18-18$ olsun!

İkinci Sorunun Yanıtı. Yukarıdaki yöntemi deneyelim. Zarları ilk deneme olarak şöyle dağıtalım:

C:						24
D:					20	23
A:	1			16	19	22
B:	2	5		15	18	21
C:	3	6	9	14	17	
D:	4	7	10	13		
A:		8	11			
B:			12			

Yani zarlarımız şöyle:

$A:$	1	8	11	16	19	22
$B:$	2	5	12	15	18	21
$C:$	3	6	9	14	17	24
$D:$	4	7	10	13	20	23

Karşılaşmaların sonuçlarını da yazalım:

$$\begin{array}{lcl} A-B & : & 19-17 \\ B-C & : & 18-18 \\ C-D & : & 17-19 \\ D-A & : & 18-18 \\ A-C & : & 19-17 \\ B-D & : & 19-17 \end{array}$$

Tam istediğimiz gibi olmadı ama pek uzak sayılmayız. $A-B$ karşılaşması tam istediğimiz gibi sonuçlandı: $19-17$. Ama öbür karşılaşmaların hiçbiri istediğimiz gibi sonuçlanmadı. İkinci ve üçüncü karşılaşmalara bakalım ilk olarak. İkinci karşılaşma $18-18$ bitmiş, oysa biz B'nin $19-17$ kazanmasını istiyorduk. Demek ki B'yi C'den 1 sayı daha güçlü kılmalıyız. Üçüncü karşılaşma $17-19$ D'nin lehine bitmiş, oysa biz tam tersini istiyorduk. Demek ki C'yi D'den 2 sayı daha güçlü kılmalıyız. Bu isteklerimizi ilk iki sütunla oynayarak yerine getirebiliriz:

$A:$	1	8	11	16	19	22
$B:$	4	5	12	15	18	21
$C:$	3	7	9	14	17	24
$D:$	2	6	10	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

$$\begin{array}{lcl} A-B & : & 19-17 \\ B-C & : & 19-17 \\ C-D & : & 19-17 \\ D-A & : & 18-18 \\ A-C & : & 19-17 \\ B-D & : & 18-18 \end{array}$$

Dördüncü ve beşinci karşılaşmalar hâlâ daha istediğimiz gibi değil. Örneğin $A - C$ karşılaşmasını iki sayı farkla A kazanmış. Oysa biz bu karşılaşmanın $18 - 18$ berabere bitmesini istiyorduk. Demek ki C'yi A'dan 1 puan güçlendirmeliyiz. Bunun için 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim. $A - D$ karşılaşmasını da yoluna koymak için 10'la 11'in yerlerini değiştirelim. İşte zarlar:

$A:$	1	7	10	16	19	22
$B:$	4	5	12	15	18	21
$C:$	3	8	9	14	17	24
$D:$	2	6	11	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

$$\begin{array}{lcl} A-B & : & 19-17 \\ B-C & : & 19-17 \\ C-D & : & 19-17 \\ D-A & : & 19-17 \\ A-C & : & 18-18 \\ B-D & : & 18-18 \end{array}$$

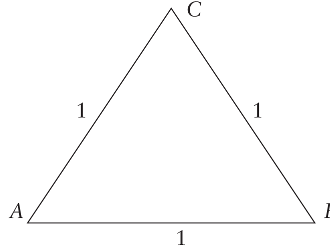
Tam istediğimiz gibi... Ayrıca her zarın ortalaması 75/6'dır ve her oyuncu $19 + 19 + 18$ sayı elde eder, yani averajda da eşitlik bozulmaz.

Yazının başında sorduğum satranç sorusunun yanıtını hâlâ daha bilmiyorum. Ama yukarıdaki bulgularım bana satrançta "daha iyi oyuncu" ilişkisinin bir ***tamsıralama*** olmadığını fısıldıyor. Kimi oyuncu oyun başında, kimi oyuncu oyun ortasında, kimi oyuncuysa oyun sonunda iyi olabilir. Kimi oyuncu savunmada iyidir. Kimisi hırslı oyuncuya karşı daha iyi oynar... Bir satranç oyununu kazandıran (ya da kaybettiren) birçok öğe olduğundan, "daha iyi satranç oyuncusu" ilişkisinin bir tamsıralama olduğunu sanmıyorum.

Hiç Kısalmadan Kısalan Yol

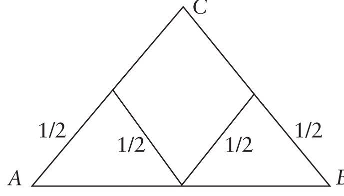
İki metrelik bir yol, hiç kısalmadan, bir metrelik bir yola dönüşebilir mi? Bu yazıda yanıtın evet olduğunu göreceğiz. İki metrelik bir yol, hepimizin gözleri önünde, bir santimetre bile kısalmadan bir metrelik bir yola dönüşecek.

Her kenarı 1 metre olan aşağıdaki eşkenar üçgene bir gözatın önce.



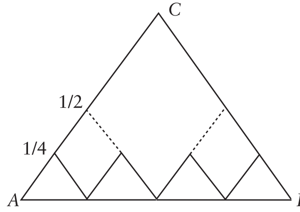
Bu üçgende A noktasıyla B noktası arasındaki uzaklık 1 metredir. Eğer A'dan B'ye gitmek için en kısa yol olan AB doğru parçasını seçecek olursak 1 metre gideriz. Ama A'dan B'ye gitmek için C'den geçecek olursak, yani ACB yolunu izlersek, 2 metre yol alırız, çünkü AC ve CB doğru parçaları birer metredir. ACB yolunu hiç kısaltmadan AB doğru parçasına dönüştüreceğim. Herkesin gözü önünde...

A'dan B'ye gitmek için yandaki zigzag yolu seçersek kaç metre gideriz?



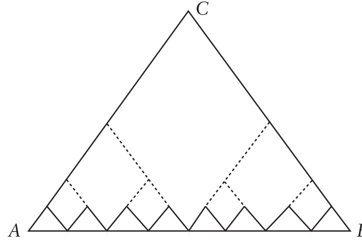
Dört kez yarım metre gideceğimizden, yolumuz gene 2 metre olur.

Ya aşağıdaki zigzagzigzag yolu izlersek?



Gene iki metre gideriz, çünkü sekiz kez 1/4 metre yol katetmek zorunda kalırız.

Aşağıdaki yola bakalım:



Bu yol da 2 metre, çünkü 16 kez 1/8 metre gidiyoruz.

Yollar gittikçe daha çok AB doğru parçasına yaklaşıyor, ama uzunlukları sabit (2 metre) kalıyor...

Görüldüğü gibi bu kırık yolların herbirinin uzunluğu 2 metre.

Yukarıda yaptığımızı hiç durmadan (sonsuza dek) sürdürebiliriz, yani bu işlemin limitini alabiliriz. Kırık yollar "sonsuzda" AB doğru parçası olur. Matematiksel bir deyişle kırık

yollar AB doğru parçasına yakınsar. Ama kırık yolların uzunluğu hep iki metredir. Herbirinin uzunluğu iki metre olan yollar, nasıl olur da uzunluğu 1 metre olan bir yola yakınsayabilir? Yoksa 1, 2'ye mi eşittir? Değilse, ki değil, neyseki değil, iki metrelik bir yol, nasıl oldu da hiç kısalmadan bir metrelik bir yola dönüştü?

Burada neler olup bittiğini açıklayabilir misiniz?

Açıklanacak bir şey yok!

Uzunluğu 2 metre olan yollar, uzunluğu 1 metre olan bir yola bal gibi de yakınsayabilir! Hepimizin gözleri önünde yakınsamadı mı?

Yolların limitinin uzunluğu (örneğimizde 1), o yolların uzunluklarının limitine (örneğimizde 2) eşit olmayabilir. Yukarıda olan da bu zaten.

Kırık yollara sırasıyla,

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots$$

adlarını verelim. A'dan B'ye giden düz yola da y diyelim. Her y_n'nin uzunluğu 2 (çünkü y_n yolu, uzunluğu $1/2^n$ olan 2^{n+1} kırık yoldan oluşuyor), öte yandan y'nin uzunluğu 1. Bu y_n yolları sonsuzda y'ye yakınsar, bundan hiç kuşku yok. Ama y_n'lerin uzunlukları y'nin uzunluğuna yakınsamıyor.

Bu, her ne denli şaşılacak bir şeyse de, matematikle çelişmiyor, herhangi bir "mantıksızlık" yok. Yukarıda olanbiten çelişse çelişse sezgiyle çelişir.

Matematikte kimi zaman işte böyle şaşılası, sezgiyle pek anlaşılamayacak şeyler olur. Sezgiyle doğru olduğunu sandığımız, hatta doğruluğundan emin olduğumuz olguları, işte bu yüzden matematiksel olarak kanıtlamak zorunluluğunu duyumsarız. Sezginin yanıldığı olur. Yukarıda olduğu gibi.

Kimi okur yukarıda olanların nedenini şöyle açıklamış olabilir: "y_n yolları, kırık, köşeli yollardır[1]. O yollar yumuşak virajlı yollar olsalardı, böyle bir sorun olmazdı, o zaman y_n yollarının uzunluğu 1'e yakınsardı." Bu açıklama doğru değildir. y_n yollarını biraz onarımla yumuşak virajlı yollara dönüştürebiliriz ve

[1]Matematikçesi: y_n yollarının her noktada türevi yoktur.

bunu öyle yapabiliriz ki, yumuşak virajlı yeni yollar gene AB doğrusuna yakınsar ama yolların hiçbirinin uzunluğu değişmez, gene her biri 2 metredir.

"Kusur" elbette kırık yollarda. Ama kırık yolların sadece kırıklığında değil kusur. Biraz önce de dediğim gibi, kırık yolları yumuşak yollar haline getirsek bile sezgimizle çelişebiliriz (ama matematikle çelişmeyiz). Bu yolların ne "kusuru" var?

Bu, bir popüler matematik yazısı olduğuna göre, y_n yollarının "kusurunu" herkesin anlayabileceği bir dilde açıklayabilmem gerekiyor. Ne yazık ki bu pek kolay olmayacak. Hatta başaramayacağımı daha başından biliyordum. Burada olanbiteni tam anlamıyla anlayabilmek için matematik bölümünün en az ilk iki yılını bitirmek gerekir.

Matematiğini tam açıklayamasam bile, sezgi gücümüzün matematikle yarışamayacağını gösteren güzel bir örnek bu bence.

Gene de açıklamaya çalışayım.

Evet... Yolların "kusuru"na geleyim. Yolların ne "kusuru" var?

İki çeşit kırık yolumuz var. Aşağıdaki doğru gibi yukarıya çıkanlar:

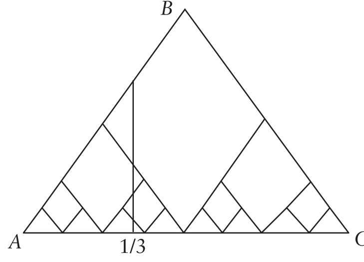


ve aşağıdaki doğru gibi aşağı inenler:



Birincisi gibi olanların **eğimine** $1/\sqrt{3}$, ikincisi gibi olanların **eğimine** $-1/\sqrt{3}$ diyelim (denir!). Dileyen okur, bunları tanım olarak kabul edebilir. Her y_n yolu, eğimi $1/\sqrt{3}$ ve $-1/\sqrt{3}$ olan doğru parçalarından oluşmuştur. Öte yandan y yatay bir yoldur ve eğimi 0'dır.

İlk koordinatı $1/3$ olan ve y_1'in üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir. (Aşağıdaki şekle bakın).



İlk koordinatı $1/3$ olan ve y_2'nin üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $-1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir. (Gene yukardaki şekle bakın.)

İlk koordinatı $1/3$ olan ve y_3'ün üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir.

İlk koordinatı $1/3$ olan ve y_4'ün üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $-1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir.

Bunu böyle sürdürebiliriz. Matematikçi okur, eğimlerin durmadan $1/\sqrt{3}$ ve $-1/\sqrt{3}$ olarak değiştiğini görecektir. Öte yandan y'nin eğimi 0'dır.

İşte y_n'lerin kusuru bu: y_n'ler y'ye yakınsıyor ama y_n'lerin eğimleri y'nin eğimine yakınsamıyor. y_n'lerin eğimleri kâh $1/\sqrt{3}$ kâh $-1/\sqrt{3}$ oluyor, ama y'nin eğimi 0.

Peki, ya y_n'lerin eğimi, y'nin eğimine yakınsasaydı? O zaman ne olurdu? O zaman da böyle bir sorun çıkabilirdi. Böyle bir sorun çıkmaması için, yani y_n'lerin uzunluklarının limitinin y_n'lerin limitinin uzunluğu olabilmesi için, y_n'lerin eğiminin y'nin eğimine yakınsamasından başka, bu yakınsamanın düzgün bir yakınsama[2] olması gerekirdi. "Düzgün yakınsama" konusunu, burada, böyle kısa bir popüler matematik yazısında açıklamaya kalkışmama yeteneklerim müsaade etmiyor...

Bu yazıda akılda kalması gereken şey şu: Kimi zaman sezgilerle matematiksel gerçek çelişebilir. Sezgi, bilimsel araştırmada çok önemlidir, sezgisiz olmaz. Ama son sözü sezgi değil, matematik söyler.

[2]İngilizcesiyle "uniformly convergent.

Saymak Sanıldığı Kadar Kolay Değildir

Bir matematikçinin bir zamanlar dediği gibi, saymasını bilenler ve bilmeyenler olmak üzere üç tür insan vardır... Bakalım siz hangi türdensiniz. Örneğin bir odada bulunan topları sayabilir misiniz?

Ayşe bomboş bir odada. Odanın kapısı ve penceresi açık. Murat odanın hemen dışında, kapının önünde. Murat'ın yanında 1, 2, 3, 4, ... diye sayılandırılmış sonsuz tane top var.

Saat 12'ye 1 dakika kala, Murat 1 ve 2 sayılı topları Ayşe'nin bulunduğu odaya atıyor. Ayşe hiç zaman kaybetmeden 1 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor.

Saat 12'ye 1/2 dakika kala, Murat 3 ve 4 sayılı topları Ayşe'ye atıyor. Ayşe gene hiç zaman kaybetmeden 2 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor.

Saat 12'ye 1/3 dakika kala, Murat 5 ve 6 sayılı topları odaya atıyor. Ayşe bu sırada 3 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor.

Saat 12'ye 1/4 dakika kala Murat 7 ve 8 sayılı topları Ayşe' ye atıyor. Ayşe de 4 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor.

Bu böyle hep devam ediyor. Ayşe'yle Murat gittikçe hızlanıyorlar. Murat'ın önündeki toplar ikişer ikişer azalıyor, pencereden bahçeye atılan toplar da birer birer çoğalıyor.

Ayşe'nin odasındaki toplar da birer birer çoğalıyorlar elbet...

Olayı bir liste halinde gösterelim.

$12'$ye $1/1$ var	Murat 1 ve $2'$yi Ayşe'ye atıyor	Ayşe $1'$i pencereden atıyor
$12'$ye $1/2$ var	Murat 3 ve $4'$ü Ayşe'ye atıyor	Ayşe $2'$yi pencereden atıyor
$12'$ye $1/3$ var	Murat 5 ve $6'$yı Ayşe'ye atıyor	Ayşe $3'$ü pencereden atıyor
$12'$ye $1/4$ var	Murat 7 ve $8'$i Ayşe'ye atıyor	Ayşe $4'$ü pencereden atıyor
$12'$ye $1/5$ var	Murat 9 ve $10'$u Ayşe'ye atıyor	Ayşe $5'$i pencereden atıyor
	...	
$12'$ye $1/n$ var	Murat $2n-1$ ve $2n'$yi Ayşe'ye atıyor	Ayşe n'yi pencereden atıyor
	...	

Soru: *Saat tam 12'de odada kaç top vardır?*

Murat'ın ve Ayşe'nin topları gittikçe artan bir hızla atıp atamayacakları, ya da sonsuz tane top olur mu gibi sorularla ilgilenmeyelim. Fiziksel engelleri ortadan kaldırıp, soruyu soyut düzeyde algılayalım.

Birinci Yanıt: Saat 12'de odada sonsuz tane top vardır. Çünkü Murat odaya hep iki top atmaktadır ve Ayşe odadan yalnızca bir top dışarı atmaktadır. Dolayısıyla odadaki top sayısı her hamleden sonra 1 artmaktadır. Bu yüzden, saat 12'de odada sonsuz tane top vardır.

İkinci Yanıt: Saat 12'de odada hiç top yoktur. Çünkü Ayşe her topu bir zaman sonra pencereden bahçeye atacaktır. Öyle değil mi? Saat 12'ye $1/n$ kala, Ayşe n sayılı topu pencereden bahçeye fırlatacaktır. Dolayısıyla her top bir zaman sonra odadan çıkacaktır ve saat 12'de odada hiç top kalamaz.

Asıl Soru: Yanıtlarımız birbirleriyle çelişiyor. Hangi yanıt doğru? Hangi yanıt yanlış? Yoksa her iki yanıt da mı yanlış? Öyleyse doğru yanıt nedir? Ve neden?

Asıl Sorunun Yanıtı: Her iki yanıt da doğru gibi gözüküyor. Ama her ikisi de doğru olamaz elbet. Biraz düşünelim.

Birinci yanıtta, odaya atılan toplara odaklanılıyor. Odada saat 12'den önce var olan top sayısı dikkate alınıyor. Odadaki top sayısı hep 1 arttığından, saat 12'de odadaki top sayısının sonsuz olacağı öne sürülüyor.

İkinci yanıttaysa odaya atılan toplara değil, dışarıya atılan toplara odaklanılıyor. Her top bir zaman sonra odadan dışarı atılacağından, odada hiç top kalamaz deniyor.

Doğru yanıt ikincisi. Birazdan ikinci yanıtın neden doğru olduğunu açıklayacağım. Bu paragrafta birinci yanıtın gerekçesinin neden geçerli olmadığını anlatmaya çalışayım: Odadaki top sayısının durmadan arttığı doğru. Bundan hiç kuşkumuz yok. Ancak bu olgu tek başına saat 12'de odada sonsuz tane top olduğunu kanıtlamaz! Odadaki top sayısı her an artabilir ve gene de saat 12'de odada hiç top kalmayabilir! Zaten burada olan da bu: Odadaki top sayısı artıyor ve saat 12'de odada hiç top kalmıyor.

Odadaki top sayısının sürekli artmasıyla saat 12'de odada sonsuz sayıda top bulunması arasındaki ilişki sanıldığı kadar güçlü değil. Zaten sorunun amacı da ikisi arasındaki ilişkinin zayıf olduğunu göstermek.

İkinci yanıtın neden doğru olduğunu daha iyi anlamak için her an odada bulunan topları yazalım:

Saat	Odadaki toplar	Odadaki top sayısı
12′ye 1/1 kaladan hemen sonra	2	1
12′ye 1/2 kaladan hemen sonra	3, 4	2
12′ye 1/3 kaladan hemen sonra	4, 5, 6	3
12′ye 1/4 kaladan hemen sonra	5, 6, 7, 8	4
12′ye 1/5 kaladan hemen sonra	6, 7, 8, 9, 10	5
12′ye 1/6 kaladan hemen sonra	7, 8, 9, 10, 11, 12	6
...	...	...
12′ye $1/n$ kaladan hemen sonra	$n+1, n+2, \ldots, 2n$	n
...	...	...

Odadaki topları küme olarak gösterelim. 12'ye $1/n$ kaladan hemen sonra odada bulunan topların kümesine A_n diyelim. Demek ki,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{2\}\\
A_2 &= \{3, 4\}\\
A_3 &= \{4, 5, 6\}\\
A_4 &= \{5, 6, 7, 8\}\\
A_5 &= \{6, 7, 8, 9, 10\}\\
A_6 &= \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}\\
&\ldots\\
A_n &= \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli. Bu kümeler dizisinin sonsuzda ne olduğunu bulmak istiyoruz.

A_1 kümesi $\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

A_2 kümesi $\{3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

A_3 kümesi $\{4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

Genel olarak A_n kümesi $\{n+1, n+2, n+3, \ldots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

B_n, n'den büyük tamsayılar kümesini simgelesin. Yani

$$B_n = \{n + 1, n + 2, n + 3, \ldots\}$$

olsun. Demek ki,

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \subseteq & B_1 \\ A_2 & \subseteq & B_2 \\ A_3 & \subseteq & B_3 \\ A_4 & \subseteq & B_4 \\ A_5 & \subseteq & B_5 \\ & \ldots & \\ A_n & \subseteq & B_n \\ & \ldots & \end{array}$$

tümceleri geçerli. A_n kümelerinin sonsuzda boş olduğunu göstermek için, B_n kümelerinin sonsuzda boş olduğunu göstermek yeterlidir. Ama B_n kümesi n'den büyük sayıları içerdiğinden, her sayı bir zaman sonra B_n'lerden birinin dışında kalır. Örneğin, 1995, B_{1995}'te değildir, B_{1996}'da da değildir; genel olarak, $n \geq 1995$ ise, 1995, B_n'de değildir. Bu dediğimiz yalnız 1995 için değil, her sayı için geçerli. Demek ki B_n kümeleri sonsuzda boşküme olurlar. Dolayısıyla A_n kümeleri de sonsuzda boşküme olurlar.

Burada yaptığımız ikinci yanıtın kanıtını açıklamaktan başka bir şey değil. İkinci yanıtın kanıtı doğrudur, yani ikinci yanıt doğrudur.

***

Yukarıdakine benzeyen şu bilmeceyi soralım: Murat Ayşe'ye her saniye iki tane (madeni) 1 lira versin. Ayşe de bu 2 lirayı cebine atsın. Ama Ayşe'nin cebi delik olsun ve cebine her iki lira

koyuşunda, bir lira cebinden yere düşsün. Sonsuzda Ayşe'nin cebinde kaç lira olur?

Ayşe'nin cebindeki para her saniye artmaktadır. Çünkü her saniye Ayşe'nin cebine 2 lira girmektedir ve yalnızca 1 lira düşmektedir. Her saniye Ayşe 1 lira daha zenginleşir. Örneğin 10 saniye sonra Ayşe'nin cebinde 10 lira olacaktır, 11 saniye sonra 11 lirası olacaktır... Bundan, Ayşe'nin cebinde sonsuzda sonsuz lira olacağı çıkar mı?

Çıkmaz!

Paraların hangi sırayla yere düştükleri önemlidir. Örneğin, eğer paralar Ayşe'nin cebinden ilk hikâyemizdeki gibi teker teker sırayla düşerse, Ayşe'nin cebinde (sonsuzda) hiç para kalmaz. Öte yandan ilk lira Ayşe'nin cebine takılı kalırsa ve sonraki liralar Ayşe'nin cebinden **sırayla** teker teker düşerse, sonsuzda Ayşe'nin bir lirası olur.

Bir başka örnek verelim: Tek sayılı liralar Ayşe'nin cebine takılı kalırsa ve çift sayılı liralar teker teker düşerse, sonsuzda Ayşe'nin sonsuz parası olur. Hem yerde hem de Ayşe'nin cebinde sonsuz para olur.

Sonuç olarak, Ayşe'nin cebinde sonsuzda herhangi tutarda parası olabilir. Ayşe'nin cebinde kalacak para, liraların hangi sırayla düştüğüne bağlıdır.

Bu son problemi biraz zorlaştıralım. Ayşe'nin cebinden paraları rastgele düşürelim. Ayşe'nin cebine giren ilk iki lira, yere düşmek için yazı tura atsınlar. 1/2 olasılıkla birinci lira düşsün, 1/2 olasılıkla ikinci lira. Bir saniye sonra Ayşe'nin cebine iki lira daha girecek ve böylece cebinde 3 lira olacak. Bu üç liradan biri de 1/3 olasılıkla yere düşsün. Bir saniye sonra Ayşe'nin cebine iki lira daha girecek ve cebinde 4 lira olacak. Bu dört liradan biri de 1/4 olasılıkla yere düşsün... Sonsuza değin bu böyle sürsün. Sonsuzda Ayşe'nin kaç parası olur?

Kimi okur, "Sonsuzda Ayşe'nin cebinde herhangi tutarda parası olabilir, 1 lirası da olabilir, sonsuz parası da olabilir," yanıtını verecektir. Gerçekten de biraz önce bunun böyle olduğunu görmemiş miydik?

Doğru yanıt bu değil. Ayşe'nin cebinden paralar **rastgele** düşerse, sonsuzda Ayşe'nin **yüzde yüz olasılıkla** sıfır lirası olacaktır. "Rastgele" sözcüğünün altını özellikle çizdim.

Paralar yere **rastgele** düştüğünde neden Ayşe'nin cebinde sonsuzda hiç para kalmaz?

Ayşe'nin cebine konan paraları numaralandıralım. 1 sayılı lirayı, yani birinci lirayı ele alalım. Bu liranın **yüzdeyüz olasılıkla** bir zaman sonra Ayşe'nin cebinden düşeceğini kanıtlayacağım. Yani, birinci liranın Ayşe'nin cebinde sonsuza değin kalma **olasılığının sıfır** olduğunu kanıtlayacağım.

Bu lira, $1/2$ olasılıkla daha ilk turda Ayşe'nin cebinden düşecektir. Ve gene $1/2$ olasılıkla birinci turda Ayşe'nin cebinde kalacaktır. Demek ki birinci liranın birinci turda düşmeme olasılığı $1/2$'dir.

Birinci liranın birinci turda düşmediğini varsayalım. İkinci turda, Ayşe'nin cebinde 3 lira vardır. $1/3$ olasılıkla birinci lira düşecektir ve $2/3$ olasılıkla düşmeyecektir. Demek ki birinci liranın ne birinci ne de ikinci turda düşmeme olasılığı,

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

olur.

Birinci liranın ikinci turda da düşmediğini varsayalım. Üçüncü turda Ayşe'nin cebinde 4 lira vardır. Birinci lira $1/4$ olasılıkla düşecektir, $3/4$ olasılıkla düşmeyecektir. Demek ki birinci liranın ne birinci ne ikinci ne de üçüncü turda düşmeme olasılığı

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

olur.

Okur hesapları sürdürebilir. Birinci liranın ilk 4 turda düşmeme olasılığı,

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

olur.

Genel olarak, birinci liranın ilk n turda (yani saniyede) düşmeme olasılığı $1/(n+1)$'dir.

Bu olasılıklar n büyüdükçe küçülür. Yani, birinci liranın düşmeme olasılığı gittikçe azalır. Bunu zaten biliyorduk. Ama şimdi yeni bir olgu keşfettik: Bu olasılıklar azalır, azalır ve n sonsuza yaklaştıkça, sıfıra yaklaşırlar. Yani birinci liranın hiç düşmeme olasılığı sıfırdır. Dolayısıyla, birinci lira 1 olasılıkla (yani %100) sonlu bir zaman sonra düşecektir!

Birinci lirayla yaptığımızı, herhangi bir lirayla da yapabiliriz. Her lira bir zaman sonra 1 olasılıkla düşecektir. Yani sonsuzda Ayşe'nin cebinde hiç para kalmaz (1 olasılıkla!).

Sonsuz Odalı Otel[1]

Bir oteliniz var. Otelinizin sonsuz sayıda odası var. Her odanın bir numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . Böylece sonsuza kadar gidiyor.

En sonuncu oda yok...

Sonsuz numaralı oda da yok. Her odanın numarası sonlu. Sadece oda sayısı sonsuz. Aşağıdaki gibi...

OTEL	1	2	3	4	5	6	7	8	...

Birinci Hikâye. Şanslı bir gününüzdesiniz, bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane... Adları 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .

OTOBÜS	1	2	3	4	5	6	7	8	...

Hepsine bir oda veriyorsunuz. 1 numaralı müşteri 1 numaralı odaya, 2 numaralı müşteri 2 numaralı odaya...

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire bir müşteri daha geliyor. Bu müşteriye nasıl bir oda bulursunuz?

Bu soruyu sorduğumda aldığım yanıtlar genellikle şöyle oluyor:

– En sona... Sonuncu odaya... (Sonuncu oda yok ki!..)

– Sondan bir sonrakine... (Sonuncu oda yok ki bir sonraki olsun!)

---

[1] Bu yazıdaki matematiksel fikir Georg Cantor'a aittir.

– İki kişiyi aynı odada yatırırım... (Yok öyle numara...)

– Yeni bir oda yaparım... (Yok daha neler, yeni bir otel yap oldu olacak!)

– Resepsiyonda yatırırım... (Bu da olmaz, illa bir oda olacak...)

– Başka bir otel bulurum...

– Evimde yatırırım...

Doğru yanıt şöyle: Yerleşmiş müşterileri bir oda kaydırırım. 1 numaralı müşteri 2 numaralı odaya, 2 numaralı müşteri 3 numaralı odaya, 3 numaralı müşteri 4 numaralı odaya geçer, herkes birer kayar ve böylece boşalan 1 numaralı odaya yeni gelen müşteriyi koyarım...

"En son müşteri nereye gidecek?" demeyin, en son müşteri yok. Nasıl en son oda yoksa, en son müşteri de yok.

İkinci Hikâye. Çok şanslı bir gününüzdesiniz, bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane... Adları a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...

Hepsine bir oda veriyorsunuz. a_1'i 1 numaralı odaya, a_2'yi 2 numaralı odaya...

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire... Birdenbire bir otobüs dolusu müşteri daha geliyor... Onda da sonsuz tane müşteri var. Adları b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, ... Odalarınız dolu. Sonsuz tane yeni müşteri geldi. Bu yeni müşterileri nasıl yerleştirirsiniz?

Aldığım yanıtlar şöyle olur genelde:

– Yerleştirmem! (Kahkahalar...)

– Her odaya ikişer kişi koyarım... (Bunun yasak olduğunu daha önce söylememiş miydim?)

– Birer kaydırıp önce b_1'i, sonra birer daha kaydırıp b_2'yi, sonra birer daha kaydırıp b_3'ü yerleştiririm ve bunu böyle sonsuza kadar devam ettiririm... (Herkes yerleştiğinde a_1 nerede olacak?)

Doğru yanıt şöyle: Birinci müşterileri çift sayılı odalara koyarım: a_1'i 2'ye, a_2'yi 4'e, a_3'ü 6'ya, a_4'ü 8'e, genel olarak a_n'yi $2n$ numaralı odaya koyarım. Böylece tek sayılı odalar boşalır, onlara da ikinci otobüsteki müşterileri yerleştiririm: b_1'i 1'e,

b_2'yi 3'e, b_3'ü 5'e, b_4'ü 7'ye, genel olarak b_n'yi $2n - 1$ numaralı odaya yerleştiririm...

Üçüncü Hikâye. Çok, ama çok şanslı bir gününüzdesiniz, sonsuz otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane otobüs... Herbirinin numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Ve her otobüste sonsuz tane müşteri var...

Birinci otobüsün müşterileri: $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, ...

İkinci otobüsün müşterileri: $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, ...

Üçüncü otobüsün müşterileri: $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$, ...

...

Müşterileri odalara nasıl yerleştirirsiniz?

Birinci otobüsün müşterilerini 2, 4, 8, 16, 32, 64 gibi 2'nin katları olan odalara yerleştirirsiniz.

İkinci otobüsün müşterilerini 3, 9, 27, 81, 243 gibi 3'ün katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Üçüncü otobüsün müşterilerini 5, 25, 125, 625 gibi 5'in (4'ün değil!) katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Dördüncü otobüsün müşterilerini 7'nin katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Beşinci otobüsün müşterilerini 11'in katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Genel olarak, n'inci otobüsün müşterilerini n'inci asalın katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Bu yöntemle her müşteri bir odaya yerleştiği gibi, geriye sonsuz tane boş oda kalır. Örneğin, 6, 10, 12, 14, 15, 18 numaralı odalar boştur.

Bir Başka Çözüm. Son problemi bir başka türlü de çözebiliriz. (n,m) sayılı müşteriyi, yani n'inci otobüsün m'inci müşterisini $2^n(2m-1)$ numaralı odaya yerleştirelim... Böylelikle hepsine bir oda düşer. Otobüsleri sıralarla, müşterileri sütunlarla gösterelim, kesişime de oda numarasını yazalım:

	1	2	3	4	$\cdots$
1	2	6	10	14	$\cdots$
2	4	12	20	28	$\cdots$
3	8	24	40	56	$\cdots$
4	16	48	80	112	$\cdots$

Sadece çift sayılı odalar kullanıldığından, sonsuz tane oda gene boş kalır.

Eğer bütün odaları kullanmak istiyorsak, (n, m) sayılı müşteriyi $2^{n-1}(2m - 1)$ numaralı odaya yerleştirelim, yani yukarıdaki oda numaralarını 2'ye bölelim... O zaman müşteriler şöyle yerleşirler:

	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	3	5	7	$\cdots$
2	2	6	1	14	$\cdots$
3	4	12	20	28	$\cdots$
4	8	24	40	56	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

9 numaralı odanın boş kaldığını sanmayın.

$$9 = 2^0 \times 9 = 2^0 \times (2 \times 5 - 1)$$

olduğundan, $(1, 5)$ sayılı müşteri 9 numaraya yerleşir. 72 numaralı odaya da $(4, 5)$ sayılı müşteri yerleşir. Bu yötemle her oda dolar.

Bir Başka Çözüm Daha: Müşterileri şöyle yerleştirelim:

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	6	10	15	21
2	2	5	9	14	20	
3	4	8	13	19		
4	7	12	18			
5	11	17				
6	16					

Bu yerleştirmenin bir formülünü bulabilir misiniz? Örneğin, $(23, 45)$ sayılı müşterinin nereye gideceğini uzun uzun uğraşmadan bulabileceğiniz bir formül yazabilir misiniz?

Değiştirip Değiştirmemek Bir Şey Değiştirir mi Değiştirmez mi?

İhsan Yücel

Biri iki kapalı zarfla size gelip şöyle diyor:

– Bu kapalı zarflarda para var. Hangisinde ne kadar olduğunu bilmiyorum ama birindeki paranın diğerindekinin iki katı olduğunu biliyorum. İstediğini seç, içindeki para senin...

Zarflardan birini seçiyorsunuz. Zarfı getiren, size, "İstersen bu zarfı bırak diğerini seç" diye bir seçenek sunuyor.

Ne yaparsınız? Zarfı değiştirir misiniz değiştirmez misiniz? Yoksa zarfı değiştirip değiştirmemek farketmez mi?

Sanki değiştirip değiştirmemek farketmezmiş gibi geliyor... Matematikçiler hislerine çok önem verseler de -en azından iş matematiğe gelince- asla hislerine teslim olmazlar!

Farketmez! Zarfların birinde n lira, diğerinde $2n$ lira olsun.

Önce zarfları değiştirmediğimizi varsayalım. 1/2 olasılıkla n liralık zarfı seçmişizdir ve n lira kazanırız. 1/2 olasılıkla $2n$ liralık zarfı seçmişizdir ve $2n$ lira kazanırız. Demek ki bu durumda beklentimiz,

$$\frac{1}{2} \times n + \frac{1}{2} \times 2n = \frac{3n}{2}$$

olur.

Şimdi zarfları değiştirdiğimizi varsayalım. Seçtiğimiz zarfta $1/2$ olasılıkla n lira vardır ve zarfı değiştirdiğimizden $2n$ lira kazanırız. Seçtiğimiz zarfta $1/2$ olasılıkla $2n$ lira da olabilir ve o zaman zarfı değiştirdiğimizden n lira kazanırız. Bu durumda beklentimiz

$$\left(\frac{1}{2}\right) \times (2n) + \left(\frac{1}{2}\right) \times n = \frac{3n}{2}$$

olur.

Her iki stratejide de $3n/2$ bulduk. Demek ki değiştirsek de değiştirmesek de bir şey farketmez. Tahmin ettiğimiz gibi...

Farkeder! Ama bir de şöyle düşünelim: Bir zarf seçtik ve diyelim zarfta m lira var. Hatta zarfa bakıp zarfta m lira olduğunu gerçekten görebiliriz de. Diğer zarfta ya $m/2$ lira ya da $2m$ lira olmalı; tam ne kadar olduğunu bilmiyoruz. $1/2$ olasılıkla $m/2$ lira, $1/2$ olasılıkla $2m$ lira vardır.

Her iki stratejide de beklentileri hesaplayalım, bakalım hangisinde daha yüksek çıkacak.

Zarfı değiştirmezsek m lira kazanacağız elbette, bundan kuşkumuz yok.

Eğer değiştirirsek, diğer zarfta $1/2$ olasılıkla $m/2$ lira olacak ve $1/2$ olasılıkla $2m$ lira olacak. Demek ki değiştirirsek beklentimiz,

$$\frac{1}{2} \times \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \times 2m = \frac{m}{4} + m = \frac{5m}{4}$$

olacak.

Değiştirmezsek beklentimiz m olacaktı. $5m/4$, m'den daha büyük olduğundan, bu sefer en iyi stratejinin değiştirmek gerektiğini bulduk.

Allah Allah! Aynı soruyu iki değişik biçimde düşündük ve birinde değiştirip değiştirmemenin farketmediğini bulduk, diğerinde ise değiştirmenin daha iyi olacağını bulduk...

Matematikte iki ayrı yöntemle iki ayrı yanıt bulmak pek enderdir. Olmaz değil, özellikle olasılık sorularında olabilir. Ama enderdir. Bertrand Paradoksu bu çelişik olasılık sorularının en ünlülerinden biridir.

Peki burada neler oluyor? Neden iki değişik yanıt buluyoruz? Bir yerde yanlış mı yaptık? Doğru yanıt nedir? Yoksa matematik çelişkili mi?

Kitabın Yazarının Notları: Birinci yanıtın doğru olduğunu, yani değiştirip değiştirmemek arasında bir fark olmadığını bir bilgisayar programı yaparak anladım. Ama bunun mantıksal bir açıklamasını bulamadığımı itiraf ederim.

İkinci Not: Haluk Oral, zarfları değiştirmememizin fark etmeyeceğini çok güzel bir mantık yürüterek açıkladı. Açıklama şöyle: Diyelim değiştirmekle daha kazançlı çıkıyoruz. O zaman zarfları iki kişi arasında paylaştıralım. Madem zarfı değiştirmek daha doğru, o zaman her iki kişi de zarfı değiştirir, zarfları değiş tokuş ederler yani, ve her ikisi de daha fazla para kazanır! Hatta zarfları hiç açmadan sürekli değiştirirlerse, her ikisi beklentilerini sürekli artırırlar! Bu mümkün olmadığından zarfları değiştirip değiştirmemek fark etmemeli.

Ama Haluk Oral'ın bu güzel kanıtı ikinci akıl yürütmenin neresinde yanlış olduğunu söylemiyor.

Üçüncü Not: Olasılık Kuramı üstatları paradoksu açıkladıklarını iddia ediyorlar. Bir gün zaman ayırıp söylediklerini anlayacağım ve yazacağım.

Sürpriz Sınav Paradoksu

Adamın biri, her ne suç işlemişse, idama mahkûm olmuş. Hâkim, kalemini kırmadan önce şöyle açıklamış kararını:

– Önümüzdeki hafta bir sabah saat 5'te idam edileceksin. Ama hangi gün idam edileceğini bir gece önceden tahmin edemeyeceksin...

İdam mahkûmu perişan halde hücresine döner. Yapacak başka şeyi olmadığından hücresinde mecburen düşünür:

Eğer ilk altı sabah idam edilmemişsem, altıncı günün gecesi, ertesi gün idam edileceğimi bilirim. Çünkü ne de olsa bir sonraki gün haftanın son günü olacaktır. Demek ki yedinci sabah idam edilemem, ilk altı sabahtan birinde idam edilmeliyim.

İdam mahkûmu düşünmeye devam eder:

Eğer ilk beş sabah idam edilmemişsem, yedinci sabah idam edilemeyeceğimi biraz önce anladığımdan, altıncı sabah idam edilmem gerektiğini beşinci günün gecesi anlamış olurum, ki hâkimin dediğine göre anlamamam gerekir... Demek ki altıncı sabah da idam edilemem...

Gerisi doğal olarak kendiliğinden gelir:

Demek ki altıncı ve yedinci sabah beni idam edemezler. Ama o zaman da, ilk dört sabah idam edilmemişsem, beşinci sabah idam edileceğimi dördüncü günün gecesi anlamış olurum. Demek ki beni ilk dört sabah idam etmeleri gerekir...

Böyle düşüne düşüne haftanın birinci sabahı idam edilmesi gerektiğini anlar ki o zaman da ne zaman idam edileceğini daha

şimdiden biliyordur.

"Demek ki beni idam edemezler..." diye sevinçle yatağa girer ve rahat bir uyku çeker.

Salı sabahı şafak sökmeden gardiyanlar infaz için hücreye girdiklerinde çok şaşırır elbet!

Bu paradoksun benzerlerini türetmek zor değildir. İşte bunlardan biri:

Bir öğretmen öğrencilerine,

– Önümüzdeki hafta sürpriz sınav olacak, der.

Öğrenciler "sürpriz sınav" kavramı üzerine öğretmenden açıklama isterler. Öğretmen, tahmin edilen açıklamayı yapar:

– Yani, önümüzdeki hafta sınav olacaksınız ama hangi gün sınav olacağınızı bir önceki gece bilemeyeceksiniz...

Öğrenciler yukarıdaki idam mahkûmu gibi düşünerek öğretmenin o hafta "sürpriz sınav" yapamayacağını bulurlar: Perşembe günü sınav yapılmamışsa, perşembe gecesi öğrenciler cuma günü sınav olacağını anlarlar, çünkü cuma günü haftanın son günüdür. Demek ki sınav cuma yapılamaz, illa cumadan önce yapılmalı. Bu akıl yürütmeyle, sınavın, yapılması mümkün olan en son gün yapılamayacağı çıkar. Haftanın en son gününden başlayıp geriye doğru giderek, öğrenciler sınavın hiçbir gün yapılamayacağını anlarlar.

Tahmin edeceğiniz üzere, öğretmen salı günü sınav yaptığında öğrenciler çok şaşırırlar!

Bu bir paradoks. Hem de dişlilerinden... Hepimiz deneyimle biliyoruz ki öğretmenler sürpriz sınav yaparlar!

Bu deneme yazısında bu paradoksu çözümlemeye çalışacağız.

İlk gözlemimiz şu olacak: Burada öğrenciden bir oyun oynaması isteniyor. Ama öğrenci oyunda tamamıyla pasif, karar aşamasında yer almıyor. Sadece düşünüyor ve sadece düşünerek oyunu paradoksal hale getiriyor. Oyunu kurallarına göre oynanabilmesi için öğrencinin düşünmemesi gerekiyor!

Gazoz Kapağı Oyunu. Yukarıdaki paradoksal oyunu bir an için şöyle değiştirelim. Biri, iki gazoz kapağından birinin altını kırmızıya boyayıp bu gazoz kapaklarını altları görünmeyecek

biçimde önümüzde sıraya dizsin ve bize desin ki,

– İki saniye arayla bu gazoz kapaklarını sırayla açıp altlarına bak. Kapaklardan birinin altını kırmızıya boyadım. Hangi gazoz kapağının altının kırmızı olduğunu kapağı açmadan bir saniye önce tahmin edemeyeceksin...

Hatta kişinin gazoz kapaklarını sıraya dizmesine de gerek yok, istediğimiz sırayla gazoz kapaklarını açabilelim. Hatta, o ikinci kişi de bilmesin hangi gazoz kapağının altının kırmızıya boyandığını. Hatta ikinci kişi de olmasın; biz kendi kendimize oynayalım bu oyunu. Gazoz kapaklarından birinin altını boyadıktan sonra kapakları karıştıralım, hangisinin altının kırmızıya boyanmış olduğunu kapağın altına bakmadan bilemeyelim. Ve kurallarımız şöyle olsun:

1. Gazoz kapaklarının hepsini teker teker ve istediğimiz sırayla açıp altına bakacağız.

2. Bir gazoz kapağını açtıktan sonra, ikinci gazoz kapağını açmadan önce iki saniye kadar bekleyeceğiz.

3. Açacağımız gazoz kapağının altının kırmızıya boyanmış olduğunu kapağı açmadan bir saniye önce tahmin edemeyeceğiz.

Üçüncü kural biraz tuhaf. Bizden elimizde olmayan bir şey isteniyor. Gazoz kapağının altının kırmızıya boyanmış olduğunu önceden tahmin edemeyecekmişiz... Oysa açtığımız birinci gazoz kapağının altı kırmızı değilse, ikinci gazoz kapağının altının kırmızı olduğunu tahmin etmememiz mümkün değil...

Öte yandan daha hiç kapak açılmamışken, bu kural ihlal edilmiş olmaz. Ayrıca ilk açılan kapağın altı kırmızıysa da bu kural ihlal edilmiş olmaz. Son kural, sadece ilk seçilen kapağın altı kırmızı çıkmazsa ihlal edilmiş olur.

Bu durumda paradoksu çözümlemek o kadar zor değil: Yüzde 50 olasılıkla ilk seçtiğim kapağın altı kırmızı olmaz ve oyunun kuralı ihlal edilmiş olur, yüzde 50 olasılıkla ilk seçtiğim kapağın altı kırmızıdır ve kural ihlal edilmez.

Sonuç: Bu oyun yüzde yüz olasılıkla kurallarına uyularak oynanamaz, yüzde 50 olasılıkla kuralları ihlal etmek zorundayız.

Öğretmen Zar Atarsa. Gelelim öğretmenin sürpriz sınavına. Hikâyeyi azıcık değiştirelim. Cumartesi dahil haftanın 6 günü okul olduğunu varsayalım. Öğretmen her sabah ders başladığında sınıfta öğrencilerinin önünde zar atsın. Eğer o sabah zar 6 ya da daha önceki sabahlarda gelmiş zarlardan biri gelirse o gün sınav olsun. Sürprizlik kuralı da hâlâ geçerli olsun.

Örneğin, pazartesi sabahı atılan zar 6'ysa sınav olsun, değilse olmasın. Diyelim pazartesi sabahı zar 5 geldi; o zaman o gün sınav olmaz. Salı sabahı gelen zar 5 ya da 6 olursa, salı sabahı sınav olur, yoksa olmaz. Diyelim salı sabahı 4 geldi ve o gün de sınav olmadı. Ertesi gün zar 4, 5 ya da 6 gelirse sınav olur, yoksa olmaz.

En geç altıncı gün yani cumartesi günü sınav olur, çünkü ilk beş gün sınav olmamışsa, yani ilk beş günde atılan zarlar 1'den 5'e kadar olan beş değişik zarsa, o zaman altıncı gün zar ne gelirse gelsin kesinlikle sınav olacak demektir; bu durumda, öğretmen de öğrenciler de altıncı gün sınav olacağını beşinci günün gecesinden bilirler, ertesi sabah zar atmaya gerek kalmaz bile...

Dolayısıyla ilk beş gün sınav olmamışsa, oyunun "sürprizlik" kuralı ihlal edilmiş olur. Demek ki

$$\frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{10}{648}$$

olasılıkla ilk beş günde 1'den 5'e kadar beş değişik zar gelir ve "sürprizlik" kuralı beşinci günün akşamı ihlal edilmiş olur. Geri kalan 638/648 olasılıkta oyunun kuralları ihlal edilmiş olmaz.

Dikkat ederseniz "paradoks" ortadan kalktı. Sadece bu oyunun yüzde yüz olasılıkla kurallarına uygun şekilde oynanamayacağını anladık.

Sürpriz Sınav Paradoksu. Şimdi zarı ortadan kaldıralım. Zar yerine sınavın hangi gün yapılacağına öğretmen karar versin...

Biraz önceki oyunda, zar, istenci (iradesi) olmayan bir varlıktı ve o oyunda paradoks yoktu. Sadece kuralları 10/648 olasılıkla ihlal ediliyordu. Bu sefer, zarın görevini öğretmen üstlendi. Bu sefer kuralları zar değil öğretmen ihlal edecek.

Sınavın yapılıp yapılmayacağına öğretmen yerine zar karar verdiğinde paradoksun ortadan kalkması çok ilginç.

Oyuncular, oyunu kurallarını ihlal etmeden oynamak istiyorlar, yani bir anlamda, daha önce $10/648$ olan oyunun kurallarının ihlal edilme olasılığını 0 yapmak istiyorlar. Belli ki bu mümkün değil. Bu oyun kuralları ihlal edilmeden oynanamaz.

Öğretmen salı günü sınav yapsa sınav gerçekten sürpriz olur. Öğrenciler öğretmene,

– Ama hocam... deyip o gün sınav olamayacağını açıklamaya çalışsalar, o zaman, öğretmen,

– Siz sınav yapamayacağımı sandınız, ama işte yapıyorum ve bu sizin için gerçekten bir sürpriz oldu. Sözümde durdum... der.

Burada şu kesin: Öğretmen, oyunun kurallarını ihlal etmek zorunda, öğrenciler de bunu biliyorlar. Oyunun kuralları öğretmenin oyunun kurallarını ihlal etmek zorunda olduğunu söylüyor. Öğretmen oyunun kurallarını ihlal etmese de (yani sınav yapmasa da) oyunun kuralları ihlal edilmiş olacak.

Bu oyunda sadece öğretmen hamle yapabiliyor. Öğrenciler pasif, onların hamle yapma şansları yok. Öte yandan öğrenciler oyunun bir parçası da: Öğrencilerin öğretmenin sınav hamlesini önceden öngörememeleri gerekir. Aslında öğrenciler bu oyunda oyuncu değil hakemler, çünkü hamle hakları yok, sadece öğretmenin yapacağı bir hamlenin yasal olup olmadığına karar veriyorlar.

Oyundan sürpriz öğesini atarak oyunu şöyle kuralım:

1. Oyun 7 hamle sürer.
2. A hamlesi (sınav) kuraldışıdır.
3. A hamlesi (sınav) mutlaka yapılmalı.

Bu oyun paradoksal bir oyun, çünkü kuraldışı bir hamle yapılması gerektiğini söylüyor, yani oyunun kurallarına göre oynanamayacağını söylüyor.

Bu oyunla sürpriz sınav oyunu özünde aynı oyunlardır. Sınavın ne zaman yapılacağını önceden bilemeyeceğimizi kuraldışı olduğuna karar verdiğimiz A hamlesine yedirdik.

Bu oyunu oynayan oyuncu ya kuraldışı A hamlesini yapacak

ya da üçüncü kuralı ihlal edecek. Her iki olasılıkta da oyunun kuralları ihlal edilmiş olacak.

Bu oyunu kaybeden aslında öğrenciler değil, kurallarına göre oynayamadığından öğretmen... Sınav olarak cezayı çekenin öğrenciler olması oyunu öğretmenin kaybettiği gerçeğini değiştirmiyor. Öğrenciler sadece kurban ediliyorlar.

Öğretmen öğrencilere,

– Yarın sınav olacaksınız ama yarın sınav olacağınızı önceden bilemeyeceksiniz, de diyebilir ve öğrenciler de ertesi gün sınav olamayacaklarına hükmedebilirdi.

Yani yukarıdaki paradoksal oyun yedi hamle yerine bir hamle sürebilirdi. O zaman sürpriz öğe ortadan kalkardı tabii. Kuraldışı hamlenin ne zaman yapılacağı önceden bilinirdi.

Ama aynı oyun birden çok hamle oynanırsa, kuraldışı hamlenin ne zaman yapılacağı önceden tahmin edilemeyeceğinden, kuraldışı hamlenin yapıldığı hamle sürpriz hamle olur.

7 hamlelik oyuna geri dönelim. Oyuncunun üçüncü kuralı hiçbir şekilde ihlal edemeyeceğini varsayalım. (Yani sınav yapılmalı, notlar idareye teslim edilecek ya da müfettiş gelecek, bir nedenden sınav mutlaka yapılmalı.) Demek ki bu durumda oyuncu kuraldışı olan A hamlesini 7 hamleden birinde yapmak zorunda. Hangi hamlede A hamlesini yapacağını bilmiyoruz.

Burada sürpriz olan A hamlesinin yapılmış olması değildir. A hamlesi kuraldışı da olsa kesinlikle yapılacaktır, bu kesin, burada sürpriz olan A hamlesinin kaçıncı hamlede yapılacağıdır, yani oyunun kurallarının kaçıncı hamlede ihlal edileceğidir.

Sınav paradoksuna geri dönecek olursak... Öğrenciler için sürpriz olan sınavın yapılması değildir. Sınavın yapılamayacağını ama sınavın gene de yapılacağını öğrenciler de öğretmen de biliyor. Sürpriz olan "öğretmen sınav yapamaz" kuralının ne zaman ihlal edileceği.

Öğrenciler şöyle düşünmeli: Öğretmen sınav yaparak oyunun kurallarını önümüzdeki hafta ihlal edecek, bakalım hangi gün oyunun kuralını ihlal edecek...

Öğretmen oyunun kurallarını ilk gün de son gün de ihlal edebilir.

Öğretmen sınav yaptığında sürpriz olan sınavın yapılması değildir. Sürpriz olan, olsa olsa sınavın o gün yapılmış olmasıdır. A hamlesinin yapılmasıyla A hamlesinin ne zaman yapılacağı apayrı şeyler, bunları birbirine karıştırmamak lazım. Yani sürpriz olan sınavın (kuraldışı hamlenin) yapılacağı gündür.

Zenon'un Paradoksları

Zenon, MÖ 5'inci yüzyılda yaşamış ve bugün üzerine pek az bildiğimiz Eski Yunanlı bir filozoftur. Ne yazık ki günümüze hiçbir yapıtı kalmamıştır. Zenon üzerine bildiklerimizi daha çok Eflatun'a (**Parmenides** adlı yapıtına) ve Aristo'ya (**Fizik** adlı yapıtına) borçluyuz.

Zenon kolay kolay yutulmayacak bir düşüncenin savunucusu olan Parmenides'in sadık bir öğrencisiydi. Parmenides şu inanılmaz düşünceyi savunuyordu: *Gerçek tektir ve değişmez. Çokluk, değişim ve hareket aslında yoktur ve duyularımızın bizi kandırmasından kaynaklanırlar...*

Zenon, belki de hocasının felsefesiyle alay edenleri susturmak için dört paradoks geliştirir. Zenon'un günümüze kalmasını sağlayan ve aşağıda açıklamaya çalışacağım (ve ne derece ciddi olduklarını göstermek amacıyla savunacağım) işte bu dört paradokstur. Bugün, yani 2500 yıl sonra bile, bu dört paradoks üzerine tartışma dinmemiştir ve gün geçtikçe filozoflar bu konuda daha fazla düşünce üretmektedirler. Bertrand Russell, Henri Bergson, Alfred North Whitehead, Zenon'un paradokslarını konu etmiş çağdaş filozoflardan birkaçıdır.

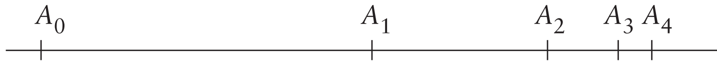
Aşil'le Kaplumbağa. Zenon, paradokslarının birinde, yarıtanrı Aşil'le kaplumbağayı yarıştırır. Kaplumbağa Aşil'den çok daha yavaş olduğundan, Aşil'in önünden başlar yarışa. Zenon, Aşil'in kaplumbağayı hiç yakalayamayacağını savunur. Şöyle:

Kaplumbağayı yakalayabilmesi için, Aşil'in önce kaplumbağanın yarışa başladığı ilk noktaya erişmesi gerekmektedir. Aşil bu noktaya eriştiğindeyse, kaplumbağa biraz daha ilerde

olacaktır, çünkü kaplumbağa da koşmaktadır. Şimdi Aşil, kaplumbağanın bulunduğu bu yeni noktaya erişmelidir. Aşil, kaplumbağanın bulunduğu bu yeni noktaya vardığındaysa, kaplumbağa biraz daha ileride olacaktır. Çünkü kaplumbağa hiç durmamakta, devamlı gitmektedir. Bu böylece sürer gider ve Aşil kaplumbağaya hiçbir zaman erişemez.

Yaşamda böyle olmaz demeyin. Parmenides de, Zenon da, sizin gibi, yaşamda Aşil'in kaplumbağayı yakalayacağını biliyorlar. Ancak, gördüğümüzün gerçek olmadığını, duyularımızın bizi aldattığını ileri sürüyorlar.

Bu paradoks üzerine düşünelim. Fikirlerimizi sabitlemek için, Aşil'in yarışa kaplumbağanın 100 metre gerisinden başladığını varsayalım. Aşil diyelim saniyede 100 metre hızla koşsun. Kaplumbağa kıpırdamasa, Aşil 1 saniyede yakalayacak kaplumbağayı. Ama kaplumbağa kaçıyor... Kaplumbağa da saniyede 10 metre hızla koşsun. Varsayalım ki öyle... Aşil'in yarışa başladığı noktaya A_0 adını verelim. Aşil 1 saniye sonra kaplumbağanın başlangıç noktası olan A_1 noktasına erişecektir. Bu 1 saniyede kaplumbağa 10 metre yol alacaktır ve A_2 noktasına varacaktır. Aşil A_2 noktasına 1/10 saniye sonra varacaktır. Bu 1/10 saniyede kaplumbağa 1 metre gitmiş olacaktır. Aşil bu 1 metreyi, 1/100 saniyede koşacaktır...



Paradoks olur da matematikçiler boş durur mu? Matematikçiler bu paradoksu çözmüşler. Şöyle çözmüşler:

Aşil A_0 noktasından	A_1 noktasına 1 saniyede	koşar
Aşil A_1 noktasından	A_2 noktasına 1/10 saniyede	koşar
Aşil A_2 noktasından	A_3 noktasına 1/100 saniyede	koşar
Aşil A_3 noktasından	A_4 noktasına 1/1000 saniyede	koşar
	...	

Demek ki, der matematikçiler, Aşil,

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

saniyede kaplumbağaya erişir. Basit bir aritmetik bu sonsuz toplamın 10/9 olduğunu gösterir[1]. Dolayısıyla Aşil kaplumbağayı 10/9 saniye sonra, yani 2 saniyeden, hatta $1,2$ saniyeden az bir zamanda yakalar.

Filozoflar bu yanıttan pek hoşnut kalmazlar. Her şeyden önce sonsuz toplamdan rahatsız olurlar. Filozoflar, matematikçilerin matematik yaparken sonsuz tane sayıyı toplamalarına sözetmezler, buna göz yumarlar ve bunu sorun etmezler, ama gerçek yaşamdan alınmış bir probleme uygulanmasına ve sonra çözümün yaşama uygulanmasına karşı çıkarlar. Matematiğin gerçek yaşama her zaman uygulanabildiği nereden biliniyor?

Matematik, doğa yasalarını bulmaya çalışır. Bunu da oldukça iyi başarır. Örneğin matematik sayesinde uçaklar, trenler, binalar yapılır, hatta Aya gidilir. Matematiğin birçok uygulaması vardır. Bu uygulamalar matematiğin doğayı anlamamızı sağlayan başarılı bir yöntem olduğunu gösterir. Ama her yere her zaman matematik uygulanabilir mi? Örneğin, iki elma artı üç armut beş meyve eder, çünkü $2 + 3 = 5$'tir. Ama bu matematiksel gerçeği iki litre suyla üç litre alkole uygularsak, beş litre sıvı elde edeceğimiz çıkar, ki bu da yanlıştır. Demek ki matematiği uygularken dikkatli olmalıyız.

Doğa, matematiğin tam bir modeli değildir. Doğa matematiğin ancak yaklaşık bir modeli olabilir[2].

---

[1]Hesaplamak istediğimiz $1+1/10+1/100+\cdots$ sonsuz toplamına S adını verelim:

$$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$$

Şimdi S'yi 10'la çarpalım:

$$10S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 10 + S.$$

Bu eşitlikten de S'nin 10/9 olduğu çıkar...

[2]Bu sözlerim yazıyı okuyan birkaç dostumun tuhafına gitti. Doğayı küçük gördüğüm, matematiği çok yücelttiğim sonucunu çıkardılar. Amacım bu değildi elbet. Sanırım yanlış anlama "model" sözcüğünden kaynaklanıyor. "Model" sözcüğü matematikte şu anlamda kullanılır: Matematiksel bir kuram aksiyomlardan ve bu aksiyomlar kullanılarak kanıtlanan teoremlerden oluşur. Örneğin Öklid geometrisi bir kuramdır, belitleri ve teoremleri vardır. Bir tane Öklid geometrisi vardır. Oysa Öklid geometrisinin aksiyom-

Üstelik, yukarıdaki hesap, Aşil'in kaplumbağayı 10/9 saniyede yakalayacağını göstermiyor. Yukarıdaki hesap gösterse gösterse Aşil'in kaplumbağayı **eğer yakalarsa** 10/9 saniyede yakalayacağını gösteriyor. Aşil'in kaplumbağayı yakalayıp yakalamadığını kanıtlamadık ki, ne zaman yakalayacağı sorusunu sorup yanıtlayalım... Sorumuz, Aşil'in kaplumbağayı ne zaman yakalayacağı değil, yakalayıp yakalayamayacağı!

Yanlış anlaşılmasın, çağdaş felsefecilerin çoğu -hepsi değil ama- Aşil'in kaplumbağayı yakalayacağına inanıyorlar. Felsefecilerin derdi bu değil. Felsefecilerin derdi Zenon'un paradoksu... Zenon'un paradoksunda yanlış nerede? Eğer mantığımızı kullanarak saçma bir sonuç kanıtlarsak, mantığımızda (yani ya varsayımlarımızda ya çıkarım kurallarımızda) bir yanlış var demektir. Bu yanlışı bulmalıyız.

Zenon'un bu paradoksunda bir başka sorun daha var. O da şu: Aşil kaplumbağayı yakalamak için sonsuz sayıda iş yapmalı; önce A_1 noktasına gitmeli, sonra A_2 noktasına gitmeli, sonra A_3 noktasına gitmeli... Sonsuz sayıda iş yapabilir miyiz? İşte canalıcı soru bu. Matematikçi kendi düşünsel dünyasında sonsuz tane sayıyı toplayabilir, ama biz, yaşamda, sonsuz tane sayıyı toplayamayız. Sonsuz sayıda iş yapamayız. En azından sonsuz sayıda iş yapabileceğimizi hayal etmek oldukça zor.

Yoksa Aşil kaplumbağaya erişmek için sonlu sayıda iş mi yapıyor? Bu soruya geçmeden önce Zenon'un ikinci paradoksundan sözedelim.

İkiye Bölünme. Zenon, salt Aşil'in kaplumbağayı yakalayamayacağını söylemekle yetinmiyor. Aşil'in bir noktadan bir baş-

---

larının, dolayısıyla teoremlerinin de, geçerli olduğu birçok uzay vardır. Bu uzaylardan herbiri Öklid geometrisinin bir modelidir. Matematikte **model**, bir kuramın aksiyomlarının ve dolayısıyla teoremlerinin de geçerli olduğu uzaydır/ortamdır/yapıdır/dünyadır. Bir kuramın uygulanabildiği "dünyaya" o kuramın ***modeli*** adı verilir. Biraz matematik bilenler için örnekleri çoğaltabilirim. Gruplar kuramı, halkalar kuramı, cisimler kuramı birer kuramdır, aksiyomlardan ve teoremlerden oluşurlar. Her grup, her halka ve her cisim bu kuramların bir modelidir. Sonuç olarak şunu söylemek istiyorum: Yukardaki sözlerimle doğayı küçümsemeyi, matematiği yüceltmeyi amaçlamadım; yalnızca kuramsal matematiğin aksiyomlarının doğaya uygulanamayabileceğini belirtmek istedim.

ka noktaya gidemeyeceğini de söylüyor. Diyelim Aşil A noktasında ve B noktasına gidecek.

Aşil A'dan B'ye gitmek için önce yolun yarısına gitmeli. Yolun yarısına gittikten sonra kalan yolun yarısına gitmeli. Daha sonra kalan yolun yarısına... Bu böylece sonsuza dek sürer. Diyelim A'yla B arasındaki uzaklık 1 metre. Aşil önce 1/2 metre gitmeli. Gittiğini varsayalım. Geriye 1/2 metre kalır. Şimdi Aşil kalan bu 1/2 metrenin yarısına gitmeli, yani 1/4 metre daha gitmeli. Geriye 1/4 metre daha kalır. Aşil bu kalan 1/4 metrenin yarısına gitmeli, yani 1/8 metre daha gitmeli... Daha sonra 1/16 metre daha gitmeli...

Sonsuz sayıda iş yapamayacağından Aşil B'ye varamaz...

Havada uçan bir oka bakalım. Okun sonsuz sayıda iş yaptığını, yani sonsuz tane noktadan geçtiğini varsayalım. Beynimiz okun sonsuz sayıda noktadan geçişini algılıyabilir mi? Bunu düşünmek oldukça zor. Olsa olsa beynimiz okun havada sonlu sayıda fotoğrafını çekiyordur ve bu fotoğrafları bir sinema şeridi gibi gözümüzün önünden geçiriyordur. Bu konuya birazdan geleceğim. Paradoksa geri dönelim. Ama şimdilik, beynimizin dışdünyayı sonlu biçimde algıladığını (başka türlü olamaz çünkü) aklımızda tutalım.

Okur belki sonsuz sayıda iş yapabileceğimizi düşünüyordur: birinci iş, ikinci iş, üçüncü iş... O zaman sonsuz iş yapmaya sondan başlayalım! Birinci paradoksa çok benzeyen bu ikinci paradoksu biraz değiştirip, Aşil'in, bırakın B noktasına gidememesini, yerinden bile kımıldayamayacağını da kanıtlayabiliriz. Gerçekten de Aşil'in A'dan B'ye gidebilmesi için önce yarı yola gitmesi gerekir. Yolun yarısına gidebilmesi için önce yolun dörtte birine gitmesi gerekir. Ama daha önce yolun sekizde birine gitmesi gerekir... Daha önce de on altıda birine gitmesi gerekir... Dolayısıyla Aşil A noktasından öteye adımını atamaz bile. Gideceği ilk nokta yoktur ki! Gideceği her mesafenin önce yarısına gitmesi gerekmektedir.

Yoksa A'yla B arasında ve A'dan hemen sonra gelen bir nokta mı var? Galiba öyle...

Paradoksun ikiye bölünmekten kaynaklandığı kesin. Aşil'in gitmesi gereken fiziksel uzaklığı hep ikiye bölüyoruz. Demek ki fiziksel uzaklığı (uzayı) durmadan ikiye bölemeyiz. Demek ki bir zaman sonra ikiye bölemememiz gerekir. İkiye böle böle, bir zaman sonra öylesine küçük bir uzaklık elde ederiz ki, elde edilen bu miniminnacık uzaklık bir kez daha ikiye bölünemez. Bir başka deyişle, **fiziksel uzay sürekli değildir.** Uzay, bölünmeyen en küçük uzay parçacıklarından oluşmuştur. Yirminci yüzyılın parçacık kuramı da bu yönde düşünmemiz gerektiğini söylemiyor mu zaten? Bu uzay parçacıklarına **uzaybirim** diyelim[3].

Uzayın uzaybirimlerden oluştuğunu kanıtladık (!) Her uzaklık sonlu sayıda uzaybirimden oluşur.

Üçüncü Paradoks. Zenon'un üçüncü paradoksuna göre, hareket yoktur, hiçbir şey hareket edemez. Uçan bir ok ele alalım örnek olarak. Okun hareket ettiğini sanıyoruz değil mi? Zenon yanıldığımızı kanıtlıyor.

Ok her an durmaktadır. İnanmazsanız okun havada bir fotoğrafını çekin. Fotoğrafta okun durduğunu göreceksiniz. Demek ki ok her an durmaktadır. Ok her an durduğuna göre hep duruyor demektir. Öyle değil mi? Hareket edebilmesi için okun en az bir an hareket etmesi gerekmektedir. Oysa ok her an durmaktadır. Her an durmakta olan ok hep durmaktadır!

Uzayın sürekli olamayacağını yukarıda gördük. Uzay küçük, çok küçük, bölünemeyen uzaybirimlerden oluşmuştur. Okun bir uzaybirim uzunluğunda olduğunu varsayalım. Uzaybirim uzunluğundaki ok, bir uzaybirim içinde hareket edemez, çünkü okun o uzaybiriminde hareket edebilmesi için, okun uzaybirimden daha kısa olması gerekir ki, uzaybirimden daha kısa bir nesne olamayacağını biliyoruz. Her uzaybirimde hareketsiz duran ok, hep hareketsizdir.

[3]Bergson bu paradoksları ve aşağıda açıklayacağım ok paradoksunu şöyle çözmeyi öneriyor: Bir hareketin belirlenmesi için hareketin başladığı ve bittiği noktaların verilmesi gerekmektedir. Okun hareketini ikiye bölmek demek, bir hareket değil, iki hareket olduğunu göstermek demektir. Okun hareketini ikiye bölmeye hakkımız yoktur. Okun bir ve bir tek hareketi vardır. Okun aldığı yolu ikiye bölebiliriz ama okun hareketini ikiye bölemeyiz.

Sinema da öyle değil midir? Sinema ekranında yürüyen bir insan aslında yürümeyen binlerce insan resminin gözümüzün önünden hızla geçmesi değil midir? Doğada hareket de aslında hareketsizlik değil midir[4]?

Uçan ok her an durmaktadır. Ama bir sonraki uzaybirimde varolmaktadır. Bergson'un da dediği gibi, aynen sinema ekranında yürüyen bir insan örneği gibi ok bize hareket edermiş gibi görünmektedir. Oysa her an durmaktadır.

Birinci paradoksumuzun bir başka kaynağı da aslında zamanın sürekli olduğunu varsaymak... Kaplumbağa sürekli hareket edebilir mi? Çok çok kısa (zamanbirim) sürelerle de olsa hareketsiz kalıyor olamaz mı?

Dördüncü Paradoks. Zenon'un son paradoksunu anlamak kolay değil. Yukarıda da dediğim gibi Zenon'dan yazılı bir yapıt yok elimizde. Zenon'un paradokslarını bize aktaran Aristo'dur. Aristo'nun aktardığı biçim pek anlaşılır gibi değil. Bu yüzden dördüncü paradoksun çeşitli yorumları var. Vereceğim yorum Aristo'nun aktardığı yorum değil ama ona çok yakın.

Yukarıda, uzayın sürekli olmadığını, bölünmeyen **uzaybirim**lerden oluştuğunu kanıtladık, daha doğrusu Zenon kanıtladı.

Şimdi şu şekle bakalım:

A	B

Her kare bir uzaybirimi simgelesin. Sol üst köşede A nesnesi, sağ alt köşede B nesnesi var. A ve B aynı anda ve aynı hızla "hareket" etsinler. A sağa, B sola gitsin. Bir zaman sonra A sağdaki karede, B de soldaki karede olur.

Şimdi paradoksal soruyu soralım: A ve B nerede karşılaştılar?

Hiç karşılaşmadılar! Çünkü aralarında karşılaşabilecekleri bir yer yok!

[4]Bunların benim düşüncelerim olmadığını, Zenon'un düşünceleri ya da Zenon'un düşüncelerinin yorumu olduğunu anımsatırım. Okuru kışkırtmak amacıyla, kendimi haddim olmayarak Zenon'un yerine koyarak Zenon'un paradokslarını savunur görünüyorum.

Matematik ve Doğa

Matematikle doğa arasındaki ilişkiyi kendimce irdelemek istiyorum bu yazımda.

1. Matematik Doğada Var mıdır? Matematiksel kavramlar doğada var mıdır? Olmadığını savunanlar var. Aşağı yukarı şöyle savunuyorlar:

> Doğada matematiksel bir nokta yoktur örneğin. Çünkü matematiksel nokta boyutsuzdur, ne elle tutulabilir ne gözle görülebilir. Kalemi kâğıda dokundurduğumuzda elde ettiğimiz "nokta" boyutludur, matematiksel nokta gibi boyutsuz değildir. Elektronun, üç boyutu ve az da olsa bir ağırlığı vardır. "İşte nokta" diye gösterebileceğimiz bir nesne yoktur doğada. Doğada matematiksel nokta yoktur, olsa olsa çok küçük benekler vardır. "Nokta" kavramı insanların uydurması/yaratısıdır.
>
> Doğada matematiksel anlamda bir doğru da yoktur. Kâğıdın üstüne çizdiğimiz "düz" çizgi hem sonludur, hem düz değildir, hem de birden fazla boyutu vardır. Kalemimiz ne denli ince yazarsa yazsın, çizdiğimiz her "düz" çizginin belli bir genişliği ve kalınlığı vardır. Oysa matematiksel doğru bir boyutludur, genişliği ve yüksekliği yoktur.
>
> Doğada "sonsuz" da yoktur. Yaşadığımız evren sonludur. Evrendeki molekül, atom, elektron, foton sayıları sonludur. Kimse sonsuza kadar sayamaz, kimse sonsuzu gösteremez, kimse sonsuza gidemez, kimse sonsuzda olduğunu düşünemez. Düşlerimiz bile sonluda yer alır.

Doğada π sayısı da yoktur. Çünkü π sayısı 3,141592-653589... diye sonsuza uzayıp giden (uzayıp gitmesi gereken) bir sayıdır. Virgülden sonra gelen sayılar belli bir düzene göre de yinelenmezler. Bu yüzden, yani sonsuz olmadığından doğada π de yoktur. Kimse π'yi tam olarak yazamaz. π'yi, bir çemberin uzunluğunun çapına bölündüğünde (ki tam olarak hesaplanamaz bu uzunluklar) elde edilen sayı olarak tanımlamak, π'nin doğada olduğunu göstermeye yeterli değildir. Çünkü bir çemberi ve çapını hesaplayıp bölme işlemini yaptığımızda, π'yi değil, π'ye yaklaşık bir sayıyı buluruz. Kaldı ki doğada matematiksel anlamda bir çember yoktur! Doğada "işte çember" diye gösterebileceğimiz bir nesne yoktur. Çember matematikçilerin yarattıkları bir kavramdır[1]. Zaten uygulamada hiçbir zaman π gibi gerçel sayılara gereksinmeyiz. $3{,}14159 = 314159/10000$ gibi kesirli sayılar uygulamada yeterlidir. Bu da, π'nin doğada olmadığı savını desteklemez mi?

Doğada π olmadığı gibi, 0,9999999... sayısı da yoktur[2]. Çünkü bu sayıyı yazmak için virgülden sonra sonsuz tane 9 koymalıyız ve ne yazık ki bu iş için yeterince zamanımız yoktur!

Doğada "bir" yoktur. Doğada olsa olsa "bir elma, bir armut" vardır. Ama doğada "bir" yoktur. Hatta doğada "bir elma" bile yoktur. Elmayla elmanın bulunduğu ortam arasındaki sınır tam belli değildir ki! Elmayla, elmanın bulunduğu ortam arasında sürekli molekül alışverişi vardır. Örneğin çürümeye yüz tutan bir elmanın tam ne zaman elmalıktan çıktığını söyleyebilir miyiz?

Her şey değiştiğinden, hiçbir şey olduğu gibi kalmadığından doğada "bir" yoktur. Doğada "bir" olmadığı gibi başka sayı da yoktur. Sayıları insanlar yaratmışlar-

---

[1] "Dünya yuvarlak değildir. Bir portakal yuvarlak değildir. Bu portakal dilimlerinin içini açın, çekirdeklerinin sayı ve şekil bakımından aynı olmadığını görürsünüz." Renoir [14]

[2] Bu sayı 1'e eşittir.

dır.

Ya sıfır? Sıfır var mıdır doğada? Sıfır, olmayan nesne sayısıdır. Olan nesneleri sayamadığımızı yukarıda gördük, olmayan nesneleri saymak daha da zor olsa gerek[3]!

Matematiğin en temel kavramları doğada yoktur.

Matematiğin doğada olmadığı herhalde üç aşağı beş yukarı böyle savunulur.

Bu felsefi hatta metafizik düşünceler hafife alınmamalı. Bir örnek daha vererek bu düşüncelerin yabana atılmaması gerektiğini göstereyim. Bildiğimiz uzayda iki nokta ele alalım. Bu iki nokta arasındaki uzay parçasının bir uzunluğu vardır. Diyelim 1 metre. Bu 1 metreyi ikiye bölebiliriz. Elde ettiğimiz iki yarım metrenin her birini de ikiye bölebiliriz. Elde ettiğimiz çeyrek metreleri de ikiye bölebiliriz. Kuramsal olarak her sayıyı ikiye bölebileceğimizden, bölme işlemini sonsuza değin yapabiliriz. Sonsuza değin olmasa bile dilediğimizce bölme işlemini sürdürebiliriz. Böle böle, bir atomun, bir elektronun, adını bilmediğim birçok parçacığın boyutlarından daha küçük bir sayı elde ederiz. Oysa fiziksel uzay durmadan ikiye bölünmez. Uzaklığı dilediğimiz kadar ikiye bölebiliriz, ama fiziksel uzayı dilediğimiz kadar ikiye bölemeyiz. Bir zaman sonra, fizik yasaları, hatta fiziğin kendisi ya da doğa, uzayı ikiye bölmemizi engeller. Demek ki iki nokta arasındaki fiziksel uzayla bu iki nokta arasındaki matematiksel uzaklık aynı şey değildir. Uzaklığı bölebiliyoruz ama uzayı bölemiyoruz. Dolayısıyla matematikle yaşadığımız fiziksel uzay tam bir uzlaşım içinde değildir.[4]

Matematiğin doğada olup olmadığı sorusu, matematiksel kavramların yaratı mı, yoksa keşif mi olduğu sorusuyla içiçedir.

Örneğin Amerika keşfedilmiştir, yaratılmamıştır; Güneş'in varlığı insanın varlığından bağımsızdır; yerçekimi insandan ve hatta yeryüzünden bağımsız vardır.

İnsan olmasaydı yerçekimi yasası bulunamazdı, ama bundan yerçekiminin olmadığı sonucu çıkmaz, hatta yerçekimi ya-

[3]Yoksa daha mı kolay? Evimdeki filleri saymak, evimdeki elmaları saymaktan daha kolay geliyor bana.

[4]Bu konu, bir önceki *Zenon'un Paradoksları* yazısında ele alınmıştır.

sasının da insansız varolamayacağı sonucu çıkmaz.

Öklid düzlemi, üçgen ve açı gibi geometrik kavramlar, grup, halka ve cisim gibi cebirsel yapılar, iki değerli (doğru ve yanlış değerli) mantık birer keşif midir, yoksa matematikçilerin yaratıları mıdır?

Bir başka deyişle matematik, Amerika anakarası gibi, Güneş gibi, yerçekimi gibi, bizim dışımızda var mıdır? Matematiksel kavramların varlıkları da insandan bağımsız mıdır?

Tartışma bizi zorunlu olarak bu sorulara da sürükleyecek.

Matematiğin doğada olup olmadığı sorusunu yanıtlamak için, her şeyden önce doğayı tanımlamalıyız. Doğa ne demektir? Doğa tanımlanmadıkça, matematiğin doğada olup olmadığı sorusu tam anlamı olmayan, ancak sezgiyle kavranabilen bir soru olarak kalacaktır.

Bu yazıda doğayı tanımlamaya kalkışmayacağım. Çünkü bu yazının amacı doğayı tanımlamak değil, "doğa" kavramına açıklık getirmek. Bu yazıda, matematiğin doğada bulunmadığını savunanların doğa kavramını sorgulayacağım. Bu kavramın daha geniş tutulması gerektiğini, matematiğin doğada olmadığına inananların oldukça basitleştirilmiş ve bence eksik bir doğa kavramına sahip olduklarını ve ne derece soyut olursa olsun, matematiği matematikçinin yaratmadığını ama keşfettiğini, yani matematiğin insandan bağımsız varolduğunu savunacağım.

Her ne denli "doğa" sözcüğünü tanımlamayacaksam da, sözcüğü çok geniş anlamda kullandığımı belirtmeliyim. "Doğa" sözcüğü salt yaşadığımız dünyayı ve yakın çevresini kapsamıyor bu yazıda. Çok daha geniş anlamda kullanıyorum sözcüğü. Belki de "doğa" yerine "evren" ya da "dış dünya" demem daha doğru olurdu.

2. Matematiğin Kaynağı Doğadır. Matematiğin doğada olup olmadığı sorusunu bir yana bırakalım önce. Matematik ve matematiksel kavramlar -doğada veya bir başka yerde- var mıdır? Bu soruyu ele alalım.

Hiç kuşku yok ki matematiksel kavramlar vardır. Matematikçilerin uydurması olarak bile olsa, matematik ve matematiksel kavramlar vardır. "Bir" kavramı, "çember" kavramı, "π"

kavramı vardır. Matematiksel kavramlar -doğada olsunlar veya olmasınlar, matematikçilerin yaratısı olarak bile olsa, düşünce olarak bile olsa, soyut düzeyde bile olsa- vardırlar. Matematikçiler bu kavramları tanımlamışlardır. Bundan kuşkumuz yok. Zaten bu kavramlar olmasaydı matematiksel kavramların doğada olup olmadıkları sorusu sorulmazdı bile. Doğruluğu apaçık belli olan bu sözlerde derin bir gerçek aramasın okur, herkesin bildiğini yineliyorum.

Bu varolan kavramlar yoktan mı varolmuştur? Yoktan hiçbir şeyin varolmayacağını biliyoruz (!). En soyut düşünceler bile somuttan kaynaklanır. Matematiksel kavramlar da yoktan varolmamıştır. “Saf düşünce ürünü” diye bir şey yoktur, olamaz. Her düşünce ürünü bizim dışımızdaki gerçeklerden kaynaklanır. Sanatta olsun, bilimde olsun, felsefede olsun, her soyut düşüncenin, her kavramın ana kaynağı doğadır, evrendir, bizim dışımızdaki dünyadır. Bunun tersini düşünmek yoktan bir şeyin varolabileceğini düşünmek olur.

Her düşünce ürünü gibi matematiğin de kaynağı dış dünyamızdır. Yani matematik dış dünyadan tamamıyla bağımsız değildir. Matematik olmasa bile, en azından matematiğin ana kaynağı matematikçinin dışındadır.

3. Matematik ve Teknoloji. Günümüzün ileri teknolojisine matematik sayesinde eriştiğimiz gözönüne alınınca, matematiğin büsbütün doğadan bağımsız olmadığı da belli oluyor zaten. Matematiğin çok soyut kavramları bile zamanla uygulama alanı bulabiliyor. Bu da, elbette, matematiğin doğayı üç aşağı beş yukarı kavrayabildiğini, betimleyebildiğini, doğanın yasalarını gerçeğe oldukça sadık kalarak kâğıda dökebildiğini gösterir. Demek ki matematik, bir ölçüde bile olsa, doğayı anlamamızı sağlıyor. Doğada “bir” olsun veya olmasın, matematikteki “bir” kavramıyla tansıklar yaratılıyor: Uzaya gidiliyor, gökdelenler dikiliyor, uydular aracılığıyla dünyanın bir köşesiyle ses ve görüntü bağlantısı kuruluyor... Matematik doğanın yasalarını ve mantığını anlamaya çalışan ve bunda da çok başarılı olan bir bilim dalı ve bir uğraştır.

Bu teknolojik gelişmelerin soyut matematikle değil, fizikle,

kimyayla, mühendislikle ve uygulamalı matematikle gerçekleştiği ileri sürülebilir. Bu sav hem doğrudur hem yanlış. Bir yandan kuramsal ve soyut matematik en beklenmedik anda uygulama alanı bulabilmektedir, öte yandan gelecekte bile nasıl uygulanacağı bilinmeyen matematiksel araştırmalar yapılmaktadır. Aynı durum kuramsal fizik için de geçerlidir. Kaldı ki, teknolojiye uygulanan fizik, kimya ve mühendislik de ilk önce kâğıt üzerinde yapılıyor, uygulamaya sonra geçiliyor.

Şimdilik şunu aklımızda tutalım: 1. Uygulanan matematik vardır, 2. Bugün uygulama alanı bilinmeyen soyut matematik vardır ve yapılmaktadır, 3. Bugün uygulama alanı bulamayan matematik gelecekte doğrudan ya da dolaylı olarak uygulama alanı bulabilir (bulamayabilir de.)

4. Matematik Doğayı Yorumlar. İkinci bölümde matematiğin kaynağının bizim dışımızdaki dünya olduğunu söyledim. Bu savım yanlış anlaşılmasın: Beynimizin dış dünyayı, bizim dışımızdaki gerçeği yorumlamadığını söylemiyorum. Cézanne'ın elmaları ve manzaraları, Picasso'nun ölüdoğaları (natürmortları) ve çıplakları doğanın aynen resmedilişi değildir, bir yorumdur. Matematik de resim gibi doğayı yorumlar.

Örneğin beş metre uzunluğunda bir cetvel üzerinde π'nin yerini tam olarak gösteremeyiz. O zaman doğada fiziksel anlamda π sayısının olup olmadığını nereden biliyoruz? π sayısının varlığına inanmak, aslında fiziksel uzunluk kavramının ne olduğunu bildiğini sanmak demek değil midir?

Biraz daha ileri gideyim. Doğada, fiziksel anlamda, 0'dan büyük ama 1/2'den, 1/3'ten, 1/4'ten ve genel olarak her $n > 0$ tamsayısı için $1/n$'den küçük bir sayının olmadığını kabul ediyoruz. Yani, sonsuz küçük sayıların doğada fiziksel anlamda olmadıklarını kabul ediyoruz. Neden? Doğada fiziksel anlamda sonsuz küçük sayıların olmadığı nereden belli? Belki sonsuz küçük sayılar var da biz (sonsuz küçük olduklarından) gözlemleyemiyoruz. Böyle bir olasılık vardır. Hiç kimse bize doğada sonsuz küçük sayıların olmadığına güvence veremez[5].

[5] Matematikte sonsuz küçük sayıların bulunduğu sayı sistemleri de vardır.

Demek istediğim, doğadaki uzunlukların bildiğimiz gerçel sayılarla ölçülebileceği varsayımının doğanın bir yorumu olduğudur.

Son bir örnek daha vereyim. Matematikte 3 sayısı $\{0, 1, 2\}$ kümesi olarak, 2 sayısı $\{0, 1\}$ kümesi olarak, 1 sayısı $\{0\}$ kümesi olarak tanımlanır. 0 sayısıysa $\emptyset$ olarak, yani boşküme olarak tanımlanır. Görüldüğü gibi sayıların matematiksel tanımı bir yorumdur. "Üç"ün bir küme olarak tanımlanması ve hele $\{0, 1, 2\}$ kümesi olarak tanımlanması için görünürde bir neden yoktur[6].

Demek ki matematik doğayı yorumlar, tam olarak betimlemez. Bu yorum kusursuz bir yorum olmayabilir, ama bir önceki bölümde de savunduğum gibi büsbütün kusurlu da değildir.

5. Doğayı Anlamak İçin Soyutlamak Zorundayız. Yukarıda matematiğin doğayı yorumladığını söyledim. Şimdi daha ileri gidip doğayı algılayabilmek için soyutlamak zorunda olduğumuzu, doğayı olduğu gibi algılayamayacağımızı kanıtlayacağım.

Elma örneğine tekrar geri dönelim. Önünüze bir elma koysa ve sizden bu özel elmayı tarif etmenizi istesem, bunda ne kadar başarılı olabilirsiniz? Sadece sözcükleri değil, her türlü görsel, bilimsel ve sanatsal olanakları da sunuyorum size.

Ne yaparsanız yapın, sonlu bir zaman içinde ve sonlu sayıda simgeyle elmayı tarif etmek zorundasınız. Sonlu zamanda ve sonlu sayıda simgeyle elmayı tamamen tarif edemezsiniz. Nitekim sunacağınız tarif ne kadar ayrıntıya girerse girsin, ne kadar uzun olursa olsun, aynen tarifinize uyan başka bir elma daha vardır ya da bir gün olacaktır. En azından tarifiniz eksik kalacaktır, bir şeyi yanlış olacaktır.

Bir başka deyişle, özel bir elmayı tüm elmalardan ayıran bir tarif bulamazsınız. Çünkü, a) Elma sonsuz sayıda veriden oluşmuştur. b) Siz sadece sonlu sayıda veriyi algılayabilirsiniz.

---

[6]Modern matematikte her şey bir kümedir. Dolayısıyla "3" de bir küme olarak tanımlanmalıdır. 3'ü, üç öğesi olan bir küme olarak tanımlamak ilk akla gelendir elbet. Üç öğeli birçok küme vardır. 3'ü tanımlamak için bu üç öğeli kümelerden hangisini seçmeliyiz? Tümevarımla 3'ten küçük doğal sayıları tanımladığımızı varsayarsak, $\{0, 1, 2\}$ kümesi en "doğal" seçimdir.

c) Sadece sonlu sayıda simgeyle tarifinizi bana sunabilirsiniz.

Buna bir de elmanın sürekli değiştiği olgusunu eklediğimiz zaman, uğraşın ne derece olanaksız olduğu çok daha iyi ortaya çıkar.

Demek ki hiçbir elmayı tam anlamıyla kavrayamayız.

Öte yandan anladığımızda "elma" diye hepimizin anladığı ortak bir kavram vardır. Sizden bana iki elma getirmenizi rica etsem, yanlışlıkla muz ya da armut getirmezsiniz.

Bu "elma" kavramı sadece var olan tüm gerçek elmaları değil, bugüne dek var olmuş ve bundan sonra var olacak tüm elmaları kapsar. Anladığımızdaki bu "elma" kavramı fiziksel olarak yoktur elbet, ne de olsa sadece bir kavramdır.

İşte fiziksel dünya özel elmalardan oluşuyorsa, matematik, anladığımızdaki bu "elma" kavramıdır. "Elma" kavramı olmadan, yani soyutlama ve matematik olmadan, dünyayı, doğayı, evreni kavramamız mümkün değildir.

Dünyayı, doğayı ve evreni anlayabilmek için soyutlamak, bir başka deyimle, matematik yapmak zorundayız.

6. Modern Matematik Bir Zorunluluktur. Nokta, doğru, çember, $\pi, 1, 2, 3$ gibi kavramların doğada bulunduğuna inanan, ancak modern matematiğin doğada bulunduğuna inanmayanlar olabilir. Bu düşünceyi de paylaşmıyorum. Bu bölümde modern matematiğin bir zorunluluk olduğunu savunacağım.

Modern matematik matematik tarihinden soyutlanarak ele alınırsa, modern matematiğin yapay bir uğraş alanı olduğu kanısına varılabilir. Günümüzün soyut matematiğinin bir zorunluluk olduğunu anlamak için matematik tarihini incelemeliyiz. Çünkü matematiğin her kavramı daha önce tanımlanmış başka kavramlardan kaynaklanır ve bulunan her yeni kavram başka kavramların bulunmasına neden olur. Matematiğin her kavramının bir temeli, bir geçmişi, varoluşunun bir gerekçesi vardır. Hiçbir matematikçi durup dururken yeni bir kavram üretmez. Matematikçilerin tanımladıkları her kavram bir gereksinim sonucudur.

Örneğin, doğru ve çember kavramlarından eğri kavramı, eğri kavramından süreklilik, limit ve türev kavramları, bu kavram-

lardan sonsuz küçük kavramı, sonsuz küçük kavramından sonsuz büyük kavramı doğar. Sayılar kavramından polinom ve cisim kavramları, bu kavramlardan grup kavramı doğar. Uzaklık kavramından topolojik uzay kavramı, topolojik uzay ve türev kavramlarından çokkatlı (manifold) kavramı doğar.

Bir örnek daha vereyim. Diyelim ilkel bir toplum 20'ye değin saymasını biliyor ve 20'den büyük sayılar için "çok" terimini kullanıyor. Bu ilkel toplumun $21, 22, 23$ sayılarını zamanla öğreneceğinden kuşkumuz olmamalı. 20'ye dek sayabilmek belli bir zekânın göstergesidir. 20'ye değin sayabilen bir toplumun 21'i öğrenemeyeceğini düşünemeyiz. Bu ilkel toplum gel zaman git zaman 21'i, 22'yi, 23'ü öğrenecek, hatta "artı 1" kavramına ulaşacaktır. Arkası kendiliğinden gelir. "Artı 1" kavramına ulaşan bir toplum kolaylıkla evrendeki "parçacık" sayısından daha büyük sayılara ulaşır. Oysa evrende böyle bir sayı fiziksel olarak yoktur, ama "artı 1" soyutlaması bu sayıyı "yaratır". Fiziksel olarak evrende bulunmayan bu çok büyük sayılardan "sonsuz" kavramına varmak zor değildir.

Ben gerçekten de "sonsuz" ve "artı 1" soyutlamasına erişmek için 20'ye değin sayabilmenin yeterli olduğuna inanıyorum. 20'ye değin sayabilen toplumların, salt bu kavramları değil, ne derece soyut olursa olsun, her matematiksel kavramı bir zaman sonra bulacağına inanıyorum.

Yukarıda, her kavramın bir başka kavramdan doğduğunu söyledim. Biraz daha ileri gideyim: Matematikçi tanımlayacağı kavramları karşısında tanımlanmaya hazır bulur. Dahaca tanımlanmamış kavramlar matematikçinin kâğıtları arasından sırıtır. Bu kavramı görmek matematikçi için bir zaman sorunudur. Örneğin "asal sayı" kavramı tamsayılarla uğraşan herkesin karşısına çıkar. Asal sayı kavramı bir matematikçinin durup dururken birdenbire bulduğu bir kavram değildir. Sayı kavramı asal sayı kavramını içinde taşır. Sayıları anlamak isteyen her akıllı yaratık, asal sayı kavramını bulmak zorundadır.

Her matematiksel kavram daha önce bulunmuş matematiksel kavramlardan **kaçınılmaz** olarak doğar.

Bunun dışında, matematiksel kavramlar kendilerini mate-

matiğin salt bir dalında göstermezler. Aynı kavram, birbiriyle ilintisiz gibi görünen birçok araştırmada, birçok matematik dalında ortaya çıkabilir. π sayısı buna güzel bir örnektir. π'nin rastlanmadığı matematiksel konu yok gibidir.

Sonuç olarak, modern matematiğin doğada varolduğunu kanıtlamak için, nokta gibi, doğru gibi, $1, 2, 3$ gibi, 0 ve π gibi, sonsuzluk gibi temel matematiksel kavramların doğada varolduklarını kanıtlamam gerekiyor. Matematiğin bu başat kavramlarının doğada varolduklarını kanıtlayabilirsem, bu kavramların zorunlu bir sonucu olan çok soyut matematiksel kavramların da doğada olduklarını kanıtlamış olacağım.

7. Matematik Doğada Vardır. Dördüncü bölümde, matematiğin gözlemlediğimiz doğayı yorumladığını savundum. Şimdi bu yorumun zorunlu olduğunu, bir seçeneğimizin olmadığını savunacağım. Matematik söz konusu olduğunda, doğayı nasıl yorumlamamız gerektiğini doğa kendisi bize söylemektedir. Çeşitli yorumlardan birini seçmek sözkonusu değildir.

Yukarıdaki, "doğada **bir elma** yoktur" düşüncesini ele alalım. "Doğa" sözcüğü çok kısıtlı bir anlamda anlaşıldığında bu düşünce doğru olabilir. Doğada bir değil, birçok elma olduğu ve hatta her elmanın her an değiştiği, elmayla ortam arasındaki sınırın tam olarak bilinemeyeceği savunulabilir. Dolayısıyla, "bir elma" yoktur denilebilir.

Ancak bu doğa anlayışını kabul ettiğimizde, doğa, parçalara ayrılamayan, durmadan değişen, bir türlü gözlemlenemeyen ve kavranamayan, elle tutulmaz, dille anlatılmaz, yazıyla betimlenmez bir bütün olur. Hatta böyle bir doğa anlayışından doğada doğanın kendisinden başka hiçbir şeyin olmadığı sonucu çıkabilir. Eğer doğa gerçekten anlaşılamayan bir bütünse, o zaman bir sorun yok. Ama doğanın hiç de anlaşılamayan bir şey olduğunu sanmıyorum. Barajlarla selleri, paratonerlerle yıldırımları önlüyoruz. Yerçekimini yeterince anlamış olmalıyız ki, uçaklar, jetler, füzeler yapıp yerçekimine karşı gelebiliyoruz.

Dolayısıyla bu doğa anlayışı pek doğru olmamalı. Doğayı anlamak demek, doğanın bütün sırlarına erişmek demek olmamalı. Her ne denli doğa hâlâ daha gizemliyse de, doğayı bi-

raz olsun kavrayabiliyoruz. Matematik, doğayı -yaklaşık olarak bile olsa- anlamamızı sağlıyor. Teknolojik gelişmeler bunun bir kanıtıdır.

Doğa yalnızca gördüklerimiz, duyduklarımız, kokladıklarımız, duyumsadıklarımız değildir. Doğanın bize sezdirdikleri de vardır. Örneğin, matematiksel doğru doğada fiziksel olarak bulunmayabilir, ama doğru düşüncesi (kavramı) doğada vardır ve doğa bize doğru kavramını sezdirtir. Upuzun bir ağaç, denizle gökyüzünü ayıran çizgi, güneş ışınları doğru kavramını fısıldarlar. Bal peteğinin hücreleri matematiksel altıgeni, gece gördüğümüz yıldızlar matematiksel noktayı, ay, güneş ve gezegenler matematiksel çemberi ve küreyi fısıldarlar. Gezegenlerin yörüngesi elipsi ve genel olarak eğriyi fısıldar. Geçen günler, mevsimler ve yıllar, bir ormandaki ağaçlar, bir bitkinin yaprakları, $1, 2, 3$ gibi sayı kavramlarını fısıldarlar. Bu fısıltı biz insanlardan bağımsız vardır. Bu fısıltıyı duyabilecek varlık olmasa da fısıltı vardır.

Doğada "İşte!" diye gösterebileceğimiz bir "bir" olmayabilir. Ama doğa bize "bir" kavramını fısıldar. Avustralya ve Afrika'nın yerlileri de, Aztekler de, İnkalar da, Batı kültürüyle tanışmamış olmalarına karşın, 1'i, 2'yi 3'ü bulmuşlardır. Demek ki doğanın bu fısıltısını duymak yalnızca bir uygarlığa özgü değildir, her uygarlık bu fısıltıyı duyabilir.

Arı peteğinin her hücresi kusursuz bir altıgen olmayabilir. Ama arı, peteğinin hücresini yaparken hücrenin altıgen olmasına çalışır. Sabun köpüğü mükemmel bir küre olmayabilir, ama sabun köpüğü mükemmel bir küre olmaya çalışır. Sonsuz küçük sayılar fiziksel olarak olsa da olmasa da, bu sayılar doğada düşünce/fısıltı olarak vardırlar, örneğin durmadan küçülen ama hiçbir zaman sıfır olmayan $1/2, 1/3, 1/4, 1/5 \ldots$ dizisi bize sonsuz küçüğü anlatır ya da anlatmaya çalışır.

8. Sonuç. Sonuç olarak, en temel matematiksel kavramların açıklamaya çalıştığım anlamda doğada bulunduğuna inanıyorum. Ve matematiğin en derin, en soyut kavramlarının doğanın bize sunduğu en temel kavramlardan bir zorunluluk sonucu doğduğuna inanıyorum. Ayrıca her kavramın bağrında başka

kavramlar barındırdığına inanıyorum.

Matematik, matematikçilerden ve insanlardan bağımsız olarak vardır. Pisagor diküçgenleri yaratmamıştır, keşfetmiştir. Galois, grupları yaratmamıştır, keşfetmiştir. Noether, halkaları yaratmamıştır, keşfetmiştir. Hilbert, Hilbert uzaylarını yaratmamıştır, keşfetmiştir...

Matematiğin evrenselliğine inanıyorum. Kanıma göre matematik, hem insanlardan hem de belli bir kültürden ve uygarlıktan bağımsızdır.

Yanlış anlaşılmak istemem: Askeri amaçlarla yapılan matematiksel araştırmalar matematiğin belli bir dalının erken gelişmesine neden olabilir; Arşimet gibi, Gauss gibi, Newton gibi dehalar kişisel çabalarıyla matematiğin daha çabuk gelişmesini sağlamış olabilirler; hatta, ataerkil bir toplum olmasaydık, günümüzün matematiği biraz daha değişik olabilirdi. Bunları yadsımıyorum. Gene de her düşünen toplumun bugün bildiğimiz matematiği er ya da geç bulacağına (keşfedeceğine) inanıyorum.

Kısacası matematiğin doğada bulunduğuna inanıyorum.

9. Hardy'nin Düşünceleri. Böylesine önemli bir konuda son sözü söylemek bana düşmez. Ünlü matematikçi G. H. Hardy'nin konumuzla ilgili yazdıklarını aktararak bitireyim yazımı[7]:

> Fiziksel gerçekle maddi dünyayı; gecesi gündüzü olan, depremleri olan, Ay ve Güneş tutulmaları olan dünyayı; fiziksel bilimlerin anlatmaya çalıştığı dünyayı kastediyorum. [...] Benim için ve sanırım çoğu matematikçi için "matematiksel gerçek" diye tanımlayacağım başka bir gerçek vardır. Bu matematiksel gerçeğin niteliği hakkında gerek matematikçiler gerek felsefeciler arasında herhangi bir uzlaşma yoktur. Bazılarına göre "zihinsel"dir ve onu bir bakıma biz yaratırız; diğerleri ise onun bizim dışımızda ve bizden bağımsız olduğu kanısındadır. Matematiksel gerçeğin ne olduğunu, inandırıcı bir şekilde açıklayabilecek bir kimse metafiziğin en zor problemlerinin çoğunu çözmüş olurdu. [...] Benim inancıma göre,

[7]Bkz. [G. H. Hardy, **Bir Matematikçinin Savunması**, Bölüm 22, Çeviren Nermin Arık, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları Dizisi 3, 1994].

matematiksel gerçeklik bizim dışımızdadır; bizim işlevimiz onu bulup çıkarmak ya da gözlemektir; ispatladığımızı veya tumturaklı sözlerle **yarattığımızı** söylediğimiz teoremler; gözlemlerimizden çıkardığımız sonuçlardan ibarettir. Bu görüş Platon'dan bu yana bir çok ünlü filozof tarafından da benimsenmiştir.

Hardy, aynı kitabın 24'üncü bölümünde matematiksel gerçeklikle fiziksel gerçekliği karşılaştırıyor:

> [...] matematiksel objeler [nesneler], çok daha göründükleri gibidirler. Bir iskemle veya bir yıldız hiç de göründüğü gibi değildir; üzerlerinde ne kadar çok düşünürsek, görüntüleri de, duyularımızdan kaynaklanan bir sis içinde, o ölçüde netliğini kaybeder, bulanıklaşır. Buna karşılık, "2" veya "317"nin duyularla ilişkisi yoktur; yakından incelediğimiz ölçüde özellikleri daha da berraklaşır. [...] pür matematik, tüm idealizmin çarpıp battığı bir kayadır. 317 bir asaldır; biz öyle düşünüyoruz diye, veya kafa yapımız şu ya da bu şekilde olduğu için değil; **çünkü öyledir**, çünkü matematiksel gerçeğin yapısı bu.

Kanıt Nedir?

Hiçten var etmek insanoğluna özgü bir nitelik değildir. Örnek: Un, şeker ve yağ olmadan helva yapılmaz. Yeni bir şey elde etmek için var olan başka şeylerden hareket etmek gerekir.

Bir şeyi başka bir şeye dönüştürebiliriz belki ama yokluktan varlık yaratamayız.

Nasıl yoktan bir şey var edemezsek, hiçbir şey bilmeden de yeni bir şey bilemeyiz. Belli bir temele dayanmadan bir gerçeğe ulaşamayız. (Burada bilmekten kastım, başkasını doğruluğuna ikna edebileceğimiz bilgidir. Örneğin Descartes'ın "düşünüyorum demek ki varım" önermesi bilginin burada kullandığım anlamındaki kapsam alanına girmez.)

Çok verilen şu örneği ele alalım: Hiç Macarca bilmediğimizi varsayalım, ama tek kelime bile bilmiyoruz... Anlamını bilmek istediğimiz Macarca bir sözcük var. Ve sadece Macarcadan Macarcaya bir sözlüğe sahibiz. Bu sözlüğe bakarak Macarca bir sözcüğün anlamını öğreneceğiz... Başka hiçbir seçeneğimiz olmadığından Macarca sözlükte o sözcüğü bulup tanımına bakalım. Tanım da Macarca tabii. Ama tek kelime Macarca bilmediğimizden tanımı anlamıyoruz. Bu sefer tanımdaki sözcükleri arıyoruz sözlükte. Bunların da tanımları Macarca... Çünkü sözlük Macarcadan Macarcaya... Bu sefer bu tanımlardaki sözcükleri arıyoruz sözlükte. Bu böyle sürekli sürer gider. Sözlük sonlu olduğundan, bir zaman sonra ikinci kez aynı sözcüğe rastlarız, yani bir sözcüğün anlamını bilmek için o sözcüğün anlamını bilmemiz gerektiğini anlarız...

Macarca bir sözcüğün anlamını Macarcadan Macarcaya bir sözlüğe bakarak anlayabilmemiz için en azından birkaç Macarca sözcük bilmeliyiz. Macarcayı bu sözlüğe bakarak sökebilmek için bilmemiz gereken sözcüklere -bir anlamda- Macarcanın aksiyomları adını verebiliriz.

Matematik benzer nedenden aksiyomatik bir uğraş dalıdır, başka türlü olamaz. Matematikçi bazı sözcükleri anlamadan ve bazı önermeleri kanıtlamadan kabul etmeli, yoksa yeni teoremler elde edemez.

Matematikte doğru kabul edilen -doğru olan demiyorum!- önermelere matematiğin aksiyomları denir.

Herkes aynı aksiyomları kabul etmek zorunda değildir elbet. Değişik aksiyomlarla değişik matematikler elde edilebilir. Ancak matematikçilerin çoğunluğunun kabul ettiği bir aksiyom sistemi vardır ve birkaç mantıkçı dışında herkes bu aksiyom sisteminde çalışır.

Diyelim elimizde bir dizi aksiyom var. Bu aksiyomlardan yola çıkarak matematik yapacağız, yani teoremler elde edeceğiz... Aksiyomlardan biri, örneğin, "$x = x$" diyebilir. Bunun gibi sonlu ya da sonsuz sayıda aksiyonumuz var. Bu aksiyomları kullanarak bir teorem elde edeceğiz...

Nasıl yapmalı?

Doğru olduğunu kabul ettiğimiz (bildiğimiz demedim! Bir kez daha!) önermelerden yeni bir önerme nasıl elde edilir?

Bunun bir kuralı olmalı. Un, şeker ve yağdan helva yapmak için bile "unu yağda kavuracaksın" gibi bazı komutlar gerekiyor...

İşte, eski önermelerden yeni önerme elde etme yöntemlerine matematikte ***çıkarım kuralları*** denir. Hiç çıkarım kuralı olmadan hiçbir yere gidemeyiz, aksiyomlardan öteye geçemeyiz, en az bir çıkarım kuralı gerekir.

Çıkarım kurallarını biri dışında hepsini aksiyomlara ekleyebiliriz, ama en az bir çıkarım kuralı elimizde bulunmalı, yoksa sadece aksiyomlarla yetinmek zorunda kalırız.

Matematikçilerin çoğunun kabul ettiği matematik tek bir çıkarım kuralına indirgenebilir. O çıkarım kuralına da ***modus***

ponens denir. Latince "doğrulama kipi" demek olan *modus ponens*'e göre eğer α ve $\alpha \to \beta$ önermelerini biliyorsak (ya da bu önermeler kanıtlanmışsa) o zaman β önermesini de biliyoruz demektir. Daha günlük bir dille ifade edelim: *modus ponens*, "eğer α doğruysa ve α doğru olduğunda β doğru oluyorsa, o zaman β da doğrudur" der. Örneğin *modus ponens* sayesinde,

Ayşe çarşambaları okulda olur

ve

bugün Çarşamba

önermelerinden

Ayşe bugün okulda

önermesini çıkarabiliriz.

Ayşe çarşambaları okulda olsa da olmasa da, bugün çarşamba olsa da olmasa da, "*Ayşe çarşambaları okulda olursa ve bugün çarşambaysa, Ayşe bugün okuldadır*" önermesi doğrudur. *Modus ponens* sayesinde...

Modus ponens, α ve $\alpha \to \beta$ önermelerinden yeni bir önerme (β önermesini) çıkarmamızı sağlar. Böylece α ve $\alpha \to \beta$ önermelerini içeren bilindikler listesine β önermesini de ekleyebiliriz.

Çıkarım kuralını değiştirme hakkına sahipiz elbette, ama o zaman çoğunluk matematikçinin kabul ettiği matematiğin dışında bir matematik yapmış oluruz. Nitekim bazı mantıkçılar değişik çıkarım kuralları kullanarak matematik yaparlar. Eğer aksiyomlarınız ve çıkarım kurallarınız standart değilse, bunu makalenizin başında belirtmeniz gerekir ki teoremlerinizi hangi matematik sisteminde kanıtladığınız daha makalenin başında kolayca anlaşılsın.

Genel olarak çıkarım kuralları şöyle ifade edilir: "Eğer α_1, ..., α_k önermeleri teoremse o zaman şu önerme de bir teoremdir." *Modus ponens* örneğinde $k = 2$ ve *modus ponens* aynen şunu söyler: "Eğer α ve $\alpha \to \beta$ birer teoremse o zaman β da bir teoremdir."

Diyelim bir aksiyom sistemi ve en az bir çıkarım kuralı kabul ettik. Şimdi bir teoremin ne demek olduğunu görelim. Önce ***kanıt***'ın tanımını yapalım. Bir kanıt her şeyden önce sonlu bir önermeler listesidir. Diyelim şöyle:

$$\alpha_1$$
$$\alpha_2$$
$$\ldots$$
$$\alpha_n$$

Bu listenin bir kanıt olması için şu koşul gerekir: Listedeki her α_i, ya bir aksiyomdur ya da listede α_i'den daha önce yer alan α'lardan bir çıkarım kuralıyla elde edilmiştir.

Eğer çıkarım kuralı olarak sadece *modus ponens*'i kabul edersek, o zaman kanıttaki her α_i önermesi ya bir aksiyom olmak zorundadır ya da j, $k < i$ için α_j önermesi $\alpha_k \to \alpha_i$ olmalıdır.

Bir kanıtın en son önermesi, yani α_n bir ***teorem***'dir; α_1, α_2, ..., α_n listesi de α_n önermesinin bir ***kanıtı***dır.

Kanıtın ilk önermesi (α_1 yani) bir aksiyom olmak zorundadır. Modus ponens'i uygulamak için α ve $\alpha \to \beta$ gibi iki önerme gerektiğinden, çıkarım kuralı olarak sadece *modus ponens*'i kullanan bir matematik sisteminde, her kanıtın ilk iki önermesi, α_1 ve α_2 yani, aksiyom olmak zorundadırlar.

Görüldüğü gibi her aksiyom bir teoremdir, tek satırlık bir teorem hem de. İşte α aksiyomunun tek satırlık kanıtı:

$$\alpha$$

Eğer α ve $\alpha \to \beta$ önermeleri birer aksiyomsa, o zaman β önermesi bir teoremdir, üç satırlık kanıtı olan bir teorem:

$$\alpha$$
$$\alpha \to \beta$$
$$\beta$$

Bir sonraki eğlenceli öyküde İngiliz mantıkçısı ve ünlü **Alice Harikalar Diyarında**'nın yazarı Lewis Carroll, *modus ponens*'i Aşil'le kaplumbağaya kanıtlattırmaya çalışır. Tabii bu, başka bir çıkarım kuralı olmadan imkânsızdır. Bu imkânsızlığın sunduğu komikliği sömürüyor Lewis Carroll.

Kaplumbağa Aşil'e Ne Dedi?

Lewis Carroll[1]

Aşil, Kaplumbağa'ya yetişip sırtına rahatça yerleşti.

– Yani sen şimdi yarış pistinin sonuna geldin, öyle mi? diye sordu kaplumbağa[2]. Sonsuz sayıda aralıktan oluşmasına rağmen... Hani çok bilmiş biri bunun mümkün olmadığını kanıtlamıştı, ne oldu?

– Sonuna geliniyor, dedi Aşil, işte geldim bile, başardım! Yürümek yeterliymiş meğer... Mesafeler sürekli azalıyordu, dolayısıyla...

– Ama ya mesafeler sürekli artıyor olsaydı? diye böldü Kaplumbağa. O zaman halin nice olurdu?

– O zaman mı? O zaman ben burada olmazdım ki... diye mütevazı bir şekilde cevap verdi Aşil, sen de bu arada bu kaplumbağa hızınla dünyayı birkaç kez turlamış olurdun herhalde!

– Aman efendim... Beni şımartıyorsunuz... İkimiz bir miyiz, siz ne de olsa bir kahramansınız! İster misin sana şimdi çoğu insanın iki üç adımda sonuna varacağını düşündüğü, ama aslında sonsuz sayıda aralıktan oluşan, üstüne üstlük her biri bir öncekinden daha uzun aralıklardan oluşan bir pist tanımlayayım?

– Vallahi çok isterim! diye cevap verdi Yunanlı savaşçı, aynı anda miğferinden kocaman bir not defteri ve kalem çıkararak.

[1]Aslı Nesin tarafından İngilizceden çevrilmiştir. Yazı 1895'te *Mind* dergisinde yayımlanmıştır.

[2]Zeno'ya ve paradoksuna gönderme. Bkz. sayfa 55-61.

(Yunanlı savaşçılarının o devirde cepleri yoktu pek.) Başla... Ve lütfen yavaş konuş! Steno henüz keşfedilmedi!

– Ah ah... Öklid'in şu güzelim Birinci Önermesi... diye dalgın dalgın mırıldandı Kaplumbağa. Öklid'i sever misin?

– Delicesine! Şimdilik yani... Yüzyıllar sonra yayımlanacak bir makale ne kadar sevilebilirse o kadar severim!

– Şimdi, o Birinci Önerme'deki akıl yürütmenin sadece bir bölümünü alalım - sadece iki adımını ve bu iki adımdan çıkarılan sonucu. Bir zahmet defterine yaz lütfen. Ve daha sonra kolayca gönderme yapabilmek için bu önermelere A, B ve Z diyelim:

(A) *Aynı şeye eşit olan iki şey birbirlerine eşittir.*

(B) *Bu üçgenin iki kenarı aynı şeye eşit olan iki şeydir.*

(Z) *Bu üçgenin iki kenarı birbirlerine eşittir.*

Öklid okurları Z'nin A ve B'nin mantıksal sonucu olduğunu, dolayısıyla A ve B'yi doğru kabul edenin Z'yi de doğru kabul etmek **zorunda** olduğunu kabul ederler herhalde?

– Kuşkusuz... En genç liseli bile -tabii lise diye bir şey 2000 yıl sonra icat edileceği zaman- bunu kabul eder.

– Hatta A ve B'nin doğruluğundan kuşku duyan bir okur bile bu akıl yürütmeyi geçerli kabul eder, öyle değil mi?

– Tabii... Böyle bir okur olabilir... "*Eğer A ve B doğru olsaydı Z de doğru olurdu*" varsayımsal önermesini kabul eden ama ne A ne de B'yi kabul eden bir okur olabilir. Böyle biri Öklid'i bırakıp futbola yönelse bence iyi eder...

– Peki tam tersi olamaz mı, yani "A'yı ve B'yi doğru kabul ediyorum, ama varsayımsal önermeyi kabul etmiyorum" diyen bir okur çıkamaz mı?

– Mümkündür... Çıkabilir... O da futbola yönelmeli bence.

– Ve bu okurların hiçbiri mantıksal olarak henüz Z'yi doğru kabul etmek zorunda değil, öyle değil mi?

– Aynen öyle, diye onayladı Aşil.

– Tamam... Şimdi beni ikinci tür bir okur olarak görüp Z'nin doğru olduğuna mantıksal olarak beni ikna et...

– Futbolcu bir kaplumbağaya çattık desene!

– Biraz absürt olurdu tabii, diye Aşil'in alayını kesti Kaplumbağa. Konudan sapma lütfen. Önce Z, sonra futbol!

– Seni Z'yi kabul etmeye mecbur etmem gerekiyor öyle mi? dedi Aşil düşünceli düşünceli. Sen şimdi A'yı ve B'yi kabul ediyorsun ama varsayımsal önermeyi...

– C diyelim ona, dedi Kaplumbağa.

Aşil kaldığı yerden devam etti:

– ... ama

(C) *A ve B doğruysa o zaman Z de doğrudur*

önermesini kabul **etmiyorsun**.

– Evet, durum aynen bu, dedi Kaplumbağa.

– O zaman senden C'yi kabul etmeni rica ediyorum.

– Deftere not ettiğin anda kabul ederim, diye cevap verdi Kaplumbağa, daha önce değil! Defterde daha başka neler var?

– Birkaç anı sadece... Kendimi kanıtladığım savaşlardan kalma... dedi Aşil heyecanlı bir şekilde sayfaları karıştırarak.

– Ohooo... Bir sürü boş sayfa var! dedi Kaplumbağa neşeli bir tonla. Hepsine ihtiyacımız olacak!

Aşil ürperdi.

– Hepsine mi?

– Evet... Şimdi dediğimi yaz:

(A) *Aynı şeye eşit olan iki şey birbirlerine eşittir.*

(B) *Bu üçgenin iki kenarı aynı şeye eşit olan iki şeydir.*

(C) *A ve B doğruysa o zaman Z de doğrudur.*

(Z) *Bu üçgenin iki kenarı birbirlerine eşittir.*

– Ona (Z) değil, (D) demen gerekir aslında, dedi Aşil. Ötekilerden hemen sonra geliyor çünkü. A, B ve C'yi kabul edersen Z'yi kabul etmek **zorundasın**.

– Niye zorundaymışım ki...

– Çünkü bu onların **mantıklı** bir sonucu. Eğer A, B ve C doğruysa Z de **doğrudur**. Bunu da tartışacak halin yok herhalde...

– "Eğer A, B ve C doğruysa Z de doğrudur..." diye düşünceli bir şekilde tekrar etti Kaplumbağa. Bak bunu bilmiyordum... Bu da başka bir varsayım galiba, öyle değil mi? Ve eğer bunun

mantığını kavramıyorsam, A, B ve C'yi kabul edip gene de Z'nin doğruluğunu reddedebilirim, öyle değil mi?

– Edersin, diye kabullendi saf kahraman... Eşi benzeri olmayan bir kalın kafalılık göstermiş olursun ama... Tabii böyle bir şey gene de mümkün. O zaman senden bir varsayımsal önerme daha kabul etmeni isteyeceğim.

– Tabii, yazdığın anda kabul ederim. Ona,

(D) A, B ve C doğruysa, Z mutlaka doğrudur.

diyelim. Defterine girdin mi bunu?

– Girdim! diye bir sevinç çığlığı attı Aşil kalemin kapağını kapatarak. Ve nihayet bu ideal yarış pistinin sonuna geldik! A, B, C ve D'yi kabul ettiğine göre **tabii ki** Z'yi kabul ediyorsun!

– Öyle mi acaba? diye masum bir sesle sordu Kaplumbağa. Bunu açıklığa kavuşturalım hele bir... Ya ben A, B, C ve D'yi kabul edip de hâlâ daha Z'yi reddediyorsam?

– O zaman Mantık boğazını sıkıp zorla kabul ettirir, dedi Aşil bir zafer edasıyla. Mantık sana der ki, "Başka yolun yok. Madem A'yı B'yi, C'yi ve D'yi kabul ettin Z'yi de kabul etmek zorundasın." Dolayısıyla başka çaren kalmadı, gördün mü?

– Mantık bana bir şey söyleme lütfunda bulunuyorsa eğer, o zaman o şey deftere yazılacak kadar değerlidir, dedi Kaplumbağa. Dolayısıyla defterine giriş yap lütfen. Ona,

(E) A, B, C ve D doğruysa Z de doğrudur.

diyelim. Ben bu önermeyi kabul edene kadar, Z'yi kabul etmek zorunda değilim. Dolayısıyla bayağı gerekli bir adımmış, değil mi?

– Anlıyorum, dedi Aşil. Sesinde hafif bir hüzün vardı.

Burada (bu hikâyeyi) anlatan adamın bankada çok acil bir işi çıktı, ve olay mahaline aylar sonrasına kadar bir daha uğramadı. Aylar sonra oradan geçtiğinde ise Aşil dayanıklı Kaplumbağa'nın sırtına oturmuş, dolmasına az kalmış olan defterine hâlâ yazıyordu. Kaplumbağa,

– O son adımı da yazdın mı? Yanlış saymadıysam bin birinci oldu bu. Ve daha milyonlarcası var... diyordu.

Matematik ve Sonsuz

Gerek konuşma vermeye gittiğim okullarda, gerek bana gelen okur mektuplarında, öğrenci ve öğretmenlerin matematikteki sonsuzluk kavramını pek iyi bilmediklerini gözlemledim. Örneğin, birçok kişi,

- Sonsuz eksi sonsuz,
- Sonsuz bölü sonsuz

gibi işlemlerin yapılabileceği sanıyor. Kimisi de "sonsuz eksi 1"in bir sayı olduğunu sanıyor, yani sonsuzdan hemen önce bir sayı olduğuna inanıyor.

Bu yazıda, matematikte kullanılan sonsuzluk kavramına biraz açıklık getirmek istiyorum.

"Sonsuz" dendiğinde, genellikle, çok uzakta, taa ötede, ulaşılamayacak bir yer düşünülür. Genel olarak, "sonsuz" sözcüğü bir yer adıymış gibi kullanılır. Bursa gibi, Balıkesir gibi, Fransa ya da Amerika gibi... Bursa'yla Sonsuz arasındaki tek ayrım, Sonsuz'a hiç ulaşılamamasıdır.

Kimi zaman da, "sonsuz" dendiğinde çok büyük bir miktar akla gelir, sayılamayacak kerte büyük bir miktar... Bu ikinci anlam, "sonsuz"un matematiksel anlamına daha yakındır.

Günlük yaşamda kullanılan anlamda bir "sonsuz"un gerçekte (doğada, evrende, uzayda...) olup olmadığı ayrı bir tartışma konusudur. Belki de "sonsuz", imgelemin bir ürünüdür ve doğada yoktur. Ama bizim konumuz, sonsuzun varlığı ya da yokluğu değil, tanımı. Biraz daha açayım: "Sonsuz"un ne demek olduğunu tanımlamak başkadır, "sonsuz"un var olup olmadığını kanıtlamak başka. Yani, kavramın tanımıyla varlığı

bambaşka sorunsallardır.

Ben, bu yazıda daha çok "sonsuz"un matematiksel tanımıyla ilgileneceğim. Konumuz felsefe değil. Yazının sonunda, matematikte sonsuzun varlığı konusuna şöyle bir değineceğim.

Yukarıda, "sonsuz" sözcüğüne günlük yaşamda verdiğimiz anlamdan kısaca sözettim. Matematikte "sonsuz"un bambaşka bir anlamı vardır. Günlük yaşamda kullanılan "sonsuz"un tam ne demek olduğunu pek iyi bilmiyorsak da, matematikte "sonsuz" sözcüğünün kesin bir anlamı vardır.

Popüler matematik yazılarımın birçoğunda, günlük yaşamda kullanılan "sonsuz" kavramının bu belirsizliğinden yararlanıp paradokslar sundum okura. Bu paradokslar bugün artık birer paradoks değilse de, pek yakın bir zamana dek paradokstular. Çünkü matematiğin "sonsuzluk" kavramı 19'uncu yüzyılın sonuna dek açık seçik bilinmiyordu. "Sonsuz" konusunda büyük bir kargaşa vardı. Kerli felli adamlar "sonsuz" kavramı üzerinde birbirleriyle anlaşamıyorlar, bu ayrılıktan dolayı birbirlerine küsüyorlardı. Kümeler kuramının gelişmesiyle birlikte (Georg Cantor sayesinde), matematikte "sonsuz"un ne anlama gelmesi gerektiği anlaşıldı.

Matematikteki "sonsuz" kavramına açıklık getirilmesinin püf noktası şudur: "Sonlu"nun ne demek olduğunu anlarsak, "sonsuz"un da ne demek olduğunu anlarız, çünkü "sonsuz", "sonlu"nun karşıtıdır, sonlu olmayana sonsuz deriz[1].

Matematikte "sonsuz" bir sıfattır, bir ad değildir. Nasıl "sonlu" bir sıfatsa, matematikte kullanılan "sonsuz" da bir sıfattır. Sonsuz, sonlunun karşıtıdır. Matematikte sonlu olmayana sonsuz denir.

Adına "sonsuz" denilen matematiksel bir nesne yoktur. Ama sonsuz matematiksel nesneler vardır.

---

[1]Bu tanımın "sonsuz"u gerçekten tanımlayabilmesi için, "sonlu"nun ne demek olduğunu bilmemiz gerekir. Matematikte "sonlu"nun birçok tanımı verilebilir. Bütün bu tanımlar birbirleriyle eşdeğer tanımlardır elbette. Yani bir tanım için sonlu olan küme, bir başka tanım için de sonludur. Burada, matematikte "sonlu"nun tanımını vermeyeceğiz. Okurun, bu tanımı sezgisiyle bildiğini varsayacağız.

Nasıl “sarı”, “yeşil”, “uzun”, “sıcak” birer sıfatsa, matematikteki “sonsuz” sözcüğü de bir sıfattır.

Matematikte, adı “sonlu” olan bir nesne olmadığı gibi, “sonsuz” diye de bir nesne yoktur.

Yineliyorum: Matematikte, “sonlu” ve “sonsuz” sözcükleri birer sıfattır. Örneğin, “sonlu sayı” terimindeki “sonlu” sözcüğü “sayı” sözcüğünü niteler. Bunun gibi, “sonsuz sayı” terimindeki “sonsuz” sözcüğü “sayı”yı niteler. (Matematik bölümünde okumamış bir okurun sonsuz sayı kavramını, hatta sonlu sayı kavramını da, bildiğini sanmıyorum.)

Matematikte 5 bir nesnedir. 1 de bir nesnedir. Dolayısıyla 5’ten 1’i çıkarabiliriz ve 4 nesnesini buluruz.

Ama “sonsuz”, bir nesne olmadığından, matematikte $\infty - 1$ diye bir nesne yoktur ve $\infty - 1$’in yazılmaması gerekir. Bir sıfattan bir nesne çıkaramayız.

Bu kavram karışıklığının suçlusu öğrenciler değil, elbette... Öğrenci hiçbir zaman suçlu olamaz ve her zaman haklıdır! Lise öğrencilerine, bugünkü eğitim sistemimizde, “sonsuz”un tam matematiksel anlamı anlatılamaz. Bugünkü eğitim sistemimizde, din bilgisi gibi, savunma bilgisi gibi, trafik bilgisi gibi, ticaret gibi çok daha “yararlı” ve sığ dersler okutulmaktadır. Öğrenciler haftada 4 saat matematik görürlerse ne âlâ!

Eğitim sistemimizin olduğu kadar biz matematikçilerin de suçu var bu kavram karışıklığında. Matematikçiler, “sonsuz”u çoğu kez bir ad gibi kullanırlar. Örneğin, sanki sonsuz bir yer adıymış gibi, “n sonsuza gittiğinde” derler. Hatta görmüşsünüzdür, $\lim_{n\to\infty}$ yazarlar. Bu tümcecikte, “sonsuz” sanki bir yer adıymış gibi kullanılmış. Yanlış! Matematikte “sonsuz” diye bir yer yoktur.

Asıl suçlu ∞ simgesi. Ortaöğretimde, matematiksel simgeler genellikle nesneler için kullanılır. Boşküme bir nesnedir ve simgesi $\emptyset$’dir örneğin. Oysa ∞ simgesi, bir nesnenin simgesi değildir.

Bu yüzden “n sonsuza gittiğinde” dememek gerekir. Onun yerine, “n durmadan büyüdüğünde, yani her tamsayıyı bir süre sonra aştığında” demek daha doğru olur.

Matematikçiler,

Sonsuz eksi sonsuz, $\infty - \infty$
Sonsuz bölü sonsuz, ∞/∞

demez ve yazmazlar. Yazdıklarında da bunun ne demek olduğunu açıklamak zorundadır. Ama kimi zaman, matematikçi,

$$\begin{aligned}\infty + 1 &= \infty\\ \infty - 1 &= \infty\\ \infty + \infty &= \infty\\ \infty/2 &= \infty\\ 2 \times \infty &= \infty\end{aligned}$$

yazabilir. Burada, matematikçinin söylemek istediği,

- Sonsuz artı 1, sonsuza eşittir
- Sonsuz eksi 1, sonsuza eşittir
- Sonsuz artı sonsuz, sonsuza eşittir
- Sonsuz bölü 2, sonsuza eşittir
- İki kere sonsuz, sonsuza eşittir **değildir**. Matematikçi sırasıyla şunları söylemek istiyordur:

- Sınırsız büyüyen bir değişkene 1 eklersek, elde ettiğimiz değişken de durmadan büyür,
- Sınırsız büyüyen bir değişkenden 1 çıkarırsak, elde ettiğimiz değişken de durmadan büyür,
- İki değişken durmadan büyüyorsa, o değişkenlerin toplamı da durmadan büyür,
- Sınırsız büyüyen bir değişkeni ikiye bölersek, gene sınırsız büyüyen bir değişken elde ederiz,
- Sınırsız büyüyen bir değişkeni ikiyle çarparsak, gene sınırsız büyüyen bir değişken elde ederiz.

Ta eski Yunanlılardan beri, matematikçiler ve filozoflar "sonsuz" ve "sonsuzluk" üzerine kafa yormuşlardır. Geçen yüzyılda, matematiğin sonsuzluk kavramını Alman matematikçi Georg Cantor biçimselleştirdi. Cantor'a göre sonsuz bir sıfattır. O gün bugün, matematikçiler "sonsuz"u ad olarak değil, sıfat olarak kullanırlar.

Matematikte sonsuz bir nesnenin[2] varlığı konusuna gelince...[3]

Matematikte sonsuz bir nesnenin varlığı (böyle bir nesnenin varlığını kabul eden bir aksiyom olmadan) kanıtlanamaz. Öte yandan matematikçiler "sonsuz" nesnelerden sözedebilmek isterler. Matematikçi sonlu nesnelerle baktığında, kimi zaman sonsuzu görür gibi olur, yani "sonsuz," sonlunun arasından kendini gösterir, kendini belli eder. Dolayısıyla matematikçi sonsuz nesnelerin varlığını kanıtlayamasa da, sonsuz nesnelerden sözedebilmek ister. Bir örnek vereyim:

0, 1, 2, 3, 4 gibi doğal sayılar sonlu matematiksel nesnelerdir. Peki, ya bu doğal sayılardan oluşan nesne? Yani

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

nesnesi? Bu nesnenin sonsuz olduğunu (yani sonsuz tane eleman içerdiğini) biliyoruz. Biliyoruz ama, matematikte böyle bir nesne var mıdır? Yani bu nesne, matematikte sözünü edebileceğimiz bir küme midir?[4]

Bu nesnenin bir küme olduğu matematiğin en basit aksiyomlarıyla kanıtlanamaz.

Madem varlığını kanıtlayamıyoruz ama öyle bir nesnenin bir küme olmasını istiyoruz, biz de matematikte böyle bir kümenin olduğunu varsayarız, yani bu nesneyi küme yapacak bir aksiyomu matematiğe sokarız... Böylece, matematikte sonsuz bir küme belirir... Daha önce yoktu, bir aksiyomla var ettik!

Ve bu aksiyomu kullanarak matematikte sonsuz bir nesnenin varlığını kanıtlamış oluruz.

Doğada sonsuz bir nesnenin olup olmadığı tartışmasını okurlara ve filozoflara bırakıyorum. (Bu konudaki düşüncelerimi, *Matematik ve Doğa* başlıklı yazısında açıklamıştım.)

---

[2] "Kümenin" demek istiyorum.

[3] Dikkat: "Sonsuz" adı verilen bir nesneden söz etmiyorum, eleman sayısı sonsuz olan bir kümeden söz ediyorum.

[4] Matematikte küme olmasını arzu ettiğimiz her nesneyi küme varsayarsak, matematikte bir çelişki elde ederiz. **Matematik ve Korku** adlı kitabımdaki *Bertrand Russell'ın Paradoksu* yazısı bu konuyu işlemektedir.

Sonsuzdan Öteye Saymak

İlk insanların sayıları bulması kolay olmamıştır herhalde. Bulunan ilk nicelik kavramları "az" ve "çok" olmalı. Daha sonra "iki"yi bulmuş olmalılar. "Bir" sayısı, "iki" bulunduktan sonra bulunabilir ancak. "İki" bulunmamışsa "bir"in gerekliliği kavranamaz. En azından bana öyle geliyor.

Yazının daha bulunmadığı eski çağlara geri dönüp insanlık tarihinde sayıların nasıl bulunduğunu, sayı saymanın hangi evrelerden geçtiğini bilemeyiz. O günlerden bugüne bir ipucu kalmasına olanak yoktur. Ama yakın geçmişte gözlenebilen ilkel kabilelerin sayı kavramları incelenebilir. Yani, tarih yerine etnografi adı verilen bilim dalından yararlanılabilir.

Çocuklarını sayabilen, ancak başka nesneleri sayamayan ilkel kabilelere rastlanmıştır. Avustralyalı bir kabilenin yerlileri ancak üçe kadar sayabilirken, dokuz çocuğa kadar "sayabiliyorlardı". Şu yöntemi kullanıyorlardı: Her aile ilk çocuğuna hep aynı adı veriyordu. İkinci, üçüncü çocuklarına da... Böylece, aile bireyleri akşam toplandığında, anababa çocuklarını "saymadan" hepsinin orada olup olmadığını anlayabiliyordu.

Bugün, çoğu çocuk sayı kavramının bilincine varmadan saymaya başlar. Küçük çocuklar, ona kadar ezbere sayabilirler ama beş elmayı saymayı beceremeyebilirler. Bu, biraz da eğitim sistemimizin ezbere dayalı olduğunun bir kanıtıdır. (Belki de eğitimde ezber gerçekten gerekiyor... Kimbilir!)

Paraguay'da yaşayan ve kendi dillerinde ancak dörde kadar

sayabilen bir kabileye, İspanyol işgalciler İspanyolca saymasını öğretmişler. Ancak kabile üyeleri nesneleri sayarken o denli yanılıyorlarmış ki saymanın ne demek olduğunu bildikleri pek söylenemezmiş. Daha da ilginci, bu aynı kabilenin üyeleri, dörde kadar bile saymayı beceremezken, sürülerinden bir hayvan kaybolduğunda yaygarayı koparıyorlarmış.

Buna benzer ilginç örnekler çoktur. Örneğin, her türlü nesneyi en az ona kadar sayabilen, ancak bu sayma işlemini saydığı nesnelere dokunmadan yapamayan kabileler de vardır. Ya sayarken bir yandan da vücudunun çeşitli yerlerine dokunmak zorunluluğunu duyan kabilelere ne denir? Ona kadar saymak için, genellikle sol elin baş parmağından başlayarak sağ elin küçük parmağına kadar birer birer dokunurlar. Ondan büyük sayılar için ayak parmakları kullanılır. Bu kabilelerden daha da ilkelleri ilk beş sayıdan sonra bileklerine, dirseklerine, omuzlarına dokunurlar. "Çok sayısı" için saçlarını gösteren kabileler de biliniyor.

Bu örneklerden şu çıkıyor: Sayıları nesnelerden soyutlamak pek kolay olmamıştır. "Bir elma, iki elma"dan, "bir, iki"ye geçiş küçümsenmeyecek bir soyutlama gücü gerektirir.

Altıdan yukarı sayamayan aritmetiği zayıf bir başka kabilenin reisliğine en fazla büyükbaş hayvanı olan kişiyi getirirlermiş. Hayvanları nasıl sayarlardı diye merak ediyor insan. Kimin daha fazla hayvanı olduğunu bulmak için saymaya gerek yoktur ki! Hayvanları karşılaştırmak yeterlidir. İki adayın hayvanları yanyana iki ağıla konur, sonra ağıllardan hayvanlar birer birer çıkarılır. Ağılı ilk boşalan seçimi kaybeder.

Bir başka kabilenin insanları, ancak "bir, iki, çok" diye sayabilirken, tek sayıları çift sayılardan ayırtedebiliyorlarmış. Sabah, çoban koyunlarını ağıldan ikişer ikişer çıkarırmış. En sona bir koyun kalırsa tek sayıda koyuna, iki koyun kalırsa çift sayıda koyuna sahip olduğunu anlarmış. Akşam koyunları ağıla gene aynı yöntemle sokarmış. Örneğin sabah çift sayıda koyunla evden çıkıp akşama tek sayıda koyunla eve dönerse koyunlarının kaybolduğunu anlarmış. Bu yöntemle, sürüden çift sayıda koyunun eksildiği anlaşılamaz elbet. Bu çobanın sürüsüne her gün

bir koyun eklesek, çoban koyunlarım kayboluyor diye kahrolur herhalde...

Belli ki insanlık sayıları bulana dek az çekmemiş... Romalılar bile, sayıları bilmelerine karşın, rakamları işlemlere öylesine elverişsizdi ki, matematikte hiçbir ilerleme gösteremediler. Romen rakamlarıyla bir toplama yapmaya kalkın, ne demek istediğimi hemen anlarsınız. Neredeyse toplamın sonucu önceden bilinmeli ki işlem yapılabilsin.

En zor bulunan sayı sıfır sayısıdır. Olmayan nesneleri saymak insanın aklına kolay kolay gelmez. Sıfır bulunduktan sonra bile insanlar sıfırın hakkını tam olarak verememişlerdir. Şimdi bizim için sorun olmayan 108 sayısı, yakın zamana değin insanlık için bir baş ağrısıydı. Sıfırı, 1 ile 8 sayısı arasına koymayı uzun süre akıl edemediklerinden sıfırın yerini boş bırakırlardı. Dolayısıyla 18, 108 ve 1008 arasındaki farkı anlamak zor olurdu.

Bugün sayılarla öylesine haşır neşiriz ki, yeni sayılar imgeleyebiliriz rahatlıkla. Birazdan yeni "sayılar" bulacağız. Bu yeni sayıları öylesine rahatlıkla bulacağız ki, tarihte çekilen zorluklarla karşılaştırınca, soyutlama ve imgeleme yolunda insanlığın aldığı yol daha iyi anlaşılacak.

Başlayalım saymaya: $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ Hiç durmadan saymayı sürdürürsek sayıların sonunu getiremeyiz. Sayıların sonu yoktur. Sayıların sonu yoktur ama öyle bir sayı düşünelim ki bildiğimiz bütün sayılardan daha büyük olsun (ve bildiğiniz bütün sayılardan büyük sayıların en küçüğü olsun). Bu pek öyle zor değil. O sayıya bir ad vermek yeterli. ω (yani "omega") olsun yeni sayımızın adı. ω sayısı bildiğimiz bütün sayılardan daha büyük. 5 binden, 10 binden, 100 binden, milyondan, milyardan, bildiğimiz her sayıdan daha büyük bu ω sayısı. ω, bir bakıma sonsuz bir sayı. Bildiğimiz sonlu doğal sayılardan daha büyük bir sayı.

ω sayısını bulduk, belki de yarattık. ω'dan sonra ne gelir? $\omega + 1$ gelir elbet! Daha sonra da $\omega + 2$, $\omega + 3$, $\omega + 4$, ... Şimdiye değin bulduğumuz sayıları yazalım:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \omega+4,\ \dots$$

Nasıl 0, 1, 2, 3, 4, ... sonlu sayılarından sonra ω'ya toslamış-

sak,

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \omega+4,\ \ldots$$

sayılarından sonra da $\omega+\omega$ sayısına toslarız. Bu sayıyı 2ω olarak kısaltalım[1]. 2ω sayısından sonra,

$$2\omega+1,\ 2\omega+2,\ 2\omega+3,\ 2\omega+4,\ \ldots$$

sayıları gelir. Ya bu sayılardan sonra? $2\omega+\omega$ gelir elbet. Bu sayıyı da 3ω olarak kısaltabiliriz. Bu böyle sürer. Yavaş yavaş 4ω, 5ω da bulunur. Bulduğumuz sayıları bir kez daha altalta yazalım:

0	1	2	3	4	$\ldots$
ω	$\omega+1$	$\omega+2$	$\omega+3$	$\omega+4$	$\ldots$
2ω	$2\omega+1$	$2\omega+2$	$2\omega+3$	$2\omega+4$	$\ldots$
3ω	$3\omega+1$	$3\omega+2$	$3\omega+3$	$3\omega+4$	$\ldots$
4ω	$4\omega+1$	$4\omega+2$	$4\omega+3$	$4\omega+4$	$\ldots$

ω, 2ω, 3ω, 4ω sayılarından sonra saymayı biliyoruz. Sağına $+1$, $+2$, … gibi simgeler koymak yetiyor. Bu ω'nın "katları" olan

$$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega,\ 4\omega,\ \ldots$$

sayılarından sonra, ω'nın hangi katı gelir? Nasıl 1, 2, 3, 4, … sayılarından sonra ω geliyorsa, ω, 2ω, 3ω, 4ω, … gibi ω'nın çarpımlarından sonra $\omega\omega$ gelir. Bu son $\omega\omega$ sayısını ω^2 olarak kısaltalım. ω^2'den sonra ω^2+1 geldiğini artık biliyoruz. Daha sonra da

$$\omega^2+2,\ \omega^2+3,\ \omega^2+4,\ \omega^2+5,\ \ldots$$

gelir. Arkasından $\omega^2+\omega$. Sonra

$$\omega^2+\omega+1,\ \omega^2+\omega+2,\ \omega^2+\omega+3,\ \ldots$$

Ta ki $\omega^2+2\omega$'ya gelene dek... Okur sürdürebilir saymayı. $\omega^2+3\omega$'ya varacaktır ister istemez. Sonra $\omega^2+4\omega$'ya. Saya saya

[1] Bu sayı matematikte 2ω değil, 2ω olarak yazılır. Bu yazı için böyle bir ayrım önemli olmayacak.

$\omega^2+\omega^2$'ye, yani $2\omega^2$'ye gelecektir. Bir zaman sonra $3\omega^2$, $4\omega^2$ yolumuzun üstüne çıkacaktır. Gide gide $\omega\omega^2$'ye varırız. Bu sayıya ω^3 diyelim.

ω, ω^2, ω^3, ... Derken ω^ω gelir. Bir zaman sonra

$$(\omega^\omega)^2, (\omega^\omega)^3, (\omega^\omega)^4, (\omega^\omega)^5$$

sayılarına rastlarız. Bunları $(\omega^\omega)^\omega$, yani ω^{ω^2} izler. Kimse durdurmadığına göre sürdürelim saymayı. ω^{ω^3}, ω^{ω^4} sayılarına varmamızı kimse engelleyemez, dolayısıyla ω^{ω^ω} sayısına da varırız. Sonra

$$\omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}$$

gibi sayılar gelir. Bu böyle sürer ve ω'lardan bir kule elde ederiz:

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}$$

Bu sayıya ϵ_0 adını verelim. $\omega^{\epsilon_0} = \epsilon_0$ eşitliği geçerlidir. Daha da devam edebiliriz ama her güzel şeyin bir sonu olmalı! Burada duralım.

Devam etmek isteyen okurlar, ileride çıkacak olan **Kümeler Kuramı** adlı kitabımızın ordinaller konusunu okusun.

Kaynakça

[B] L. Brunschwicg, **Les Etapes de la Philosophie Mathématique**, A. Blanchard, Librairie Scientifique et Technique, Paris, 1972, sayfa 9.

[E] Edward John Eyre, **Journals of Expeditions of Discovery into Central Australia and Overland from Adelaïd to King George's Sound (1840-1841)**, 2 cilt, Londra, 1845, sayfa 324.

Russell Paradoksu

I. Giriş. Bu yazıda, geçen yüzyıl başında matematiği sarsan, hatta derin bir krize sokan bir paradokstan sözedeceğiz. Ama önce paradokslara genel bir bakış atacağız. Bilinen paradokslara bulunan çözümlerden sözedeceğiz.

Matematiğin temellerinin değişmesine neden olan paradoksu ünlü İngiliz filozofu ve matematikçisi Bertrand Russell (1858-1932) bulmuştur. Russell paradoksunu paradoks olmaktan kurtaran kümeler kuramını daha sonraki yazılarda kısmen de olsa açıklayacağız.

II. Yamyam Paradoksu. Bilinen bilmecedir. Yamyamlar bir mantıkçı yakalarlar. Mantıkçıya şöyle derler:

– Biz her yakaladığımız yabancıyı yeriz. Kimini haşlayıp kimini kızartıp yeriz. Avımıza bir soru sorarız. Avımız soruyu doğru yanıtlarsa haşlarız, yanlış yanıtlarsa kızartırız.

Dedikleri gibi de yaparlar. Mantıkçıya bir soru sorarlar. Mantıkçı bir süre düşündükten sonra soruyu yanıtlar. Yanıtı duyan yamyamlar ne yapacaklarını şaşırırlar. Yanıt öylesine akıllıca bir yanıttır ki, yamyamlar mantıkçıyı ne haşlar ne de kızartabilirler. Yamyamlar mantıkçıya ne sormuşlardır, mantıkçı soruyu nasıl yanıtlamıştır?

Yamyamlar mantıkçıya şu soruyu sormuşlardır:

– Seni haşlayıp mı, yoksa kızartıp mı yiyeceğiz?

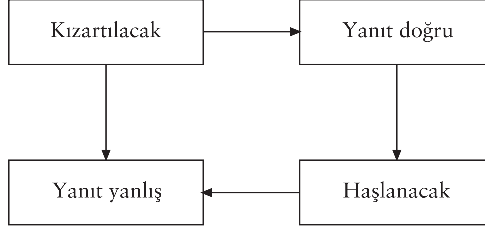
Mantıkçı şöyle yanıtlamıştır:

– Kızartacaksınız!

Bu soru ve yanıtla, mantıkçı ne haşlanır, ne de kızartılır.

Bir an, mantıkçının kızartılacağını varsayalım. O zaman

mantıkçının yanıtı doğru olur. Ama yanıt doğru olduğundan -yamyamların kendi kurallarına göre- mantıkçının haşlanması gerekmektedir. Demek mantıkçı kızartılamaz.



Şimdi de mantıkçının haşlanacağını varsayalım. O zaman mantıkçının yanıtı yanlış olacak. Yanıt yanlış olduğundan da mantıkçının kızartılması gerekmektedir. Demek mantıkçı haşlanamaz.

Yamyamlar tam bir kısır döngüye girmişlerdir. Kızartsalar haşlamaları gerekecek, haşlasalar kızartmaları!

Sonuç olarak mantıkçı kurtulur[1].

Bu gibi durumlar "paradoksal" olarak nitelendirilir. "Saçma" bir durumdur. Çünkü mantıkçı ya kızartılacaktır ya haşlanacaktır; bunu önceden biliyoruz. Ayrıca yamyamların sorduğu soruya yanıt olarak iki seçenek vardır: Sorunun yanıtı ya doğru ya yanlış olmalıdır, bunu da biliyoruz. Oysa yukarıdaki sorunun yanıtı ne doğru ne yanlıştır; daha doğrusu yanıt doğruysa yanlış, yanlışsa doğrudur. Yani yanıtın doğruluğu ya da yanlışlığı yanıtın yanlışlığı ya da doğruluğuna bağlıdır!

Bu paradoks nasıl çözülür, yani çelişki nasıl giderilir? Şöyle: Öyküde anlatıldığı gibi bir boy yoktur. Yani, yakaladıkları her yabancıyı yiyen ve yukarıdaki yöntemle yiyen bir boy yoktur.

Bu çözüme kimi okur karşı çıkabilir. Matematikçileri elindeki oyuncağı sevmeyip kıran, bilmecesini çözemeyip yırtan mızıkçı çocuklara benzetebilir. Ama bu, matematikçilere haksızlık olur. Şöyle düşünelim: Bilmecede şu şu özelliklere sahip bir boy vardır diyoruz. Öyle bir boyun olabileceğinden ilk

[1]Eğer mantıkçı, "haşlayacaksınız," diye yanıtlasaydı, yamyamlar mantıkçıyı istedikleri gibi yiyebilirlerdi, ister haşlar, ister kızartırlardı ve bir çelişki doğmazdı.

başta kuşku duymayabiliriz, ancak görüyoruz ki böyle bir boyun varlığı bizi çelişkiye götürüyor. Dolayısıyla böyle bir boy olamaz.

III. Berber Paradoksu. Yukarıdaki paradoksa benzer paradoks çoktur. İşte bir tane daha:

Köyün birinde bir berber varmış. Bu berber, o köyde kendini tıraş etmeyen herkesi tıraş edermiş, kendini tıraş edenleriyse tıraş etmezmiş. Soru şu: bu berber kendini tıraş eder mi, etmez mi? Kendini tıraş etmezse, kendini tıraş etmeyen herkesi tıraş ettiğinden, kendini tıraş etmeli. Kendini tıraş ederse, kendini tıraş edenleri tıraş etmediğinden, kendini tıraş etmemeli.

Çözüm yukarıdaki gibi: Böyle bir berber olamaz.

IV. Kataloglar Paradoksu. Bu yüzyılın başında matematikçileri derin düşüncelere salan paradoksa geçmeden önce, o paradoksun bir benzerinden sözedelim.

Matbaanın bulunuşundan sonra kitap sayısı çoğaldı doğal olarak. İlk kez ne zaman kataloglara gereksinildiğini bilmiyorum, ama bir gün gereksinildi. Kitaplar çoğalınca, kataloglar da çoğaldı. Kataloglar çoğalınca katalogların da katalogları yapılmaya başlandı.

Bazı kitap katalogları kendi adlarını dizelgelerine (listelerine) almazlar, bazı kataloglarsa alırlar (katalog da bir kitap değil midir!) Örneğin kırmızı kapaklı kitaplar kataloğunun kapağı kırmızı olacaksa katalog kendi adını dizelgeye alır, yoksa almaz. 200 sayfadan az kitaplar kataloğu 200 sayfadan az olacaksa katalog kendi adını kataloga alır, yoksa almaz[2]. Bir yayıncının aklına "kendi adını içermeyen kataloglar kataloğu" yapmak gelir. Bir sorun çıkar ortaya. Bu hazırlanmakta olan katalog kendi adını içermeli midir, içermemeli midir? Kendi adını içerse, kataloğun türünden dolayı (kendi adını içermeyen kataloglar kataloğu), adını içermemesi gerekir. Kendi adını içermese, yine kataloğun türünden dolayı (kendi adını içermeyen kataloglar kataloğu), kendi adını içermesi gerekir.

---

[2]Katalog kendi adını aldığından dolayı sayfa sayısı artıp 200 sayfayı aşarsa ve kendi adını almadığı takdirde 200 sayfayı aşmıyorsa ne olacak?!

Bir paradoks daha! Nasıl çözeceğiz? Hazırlanması bitmemiş bir kataloğun katalog sayılamayacağını önermek bir çözüm müdür? Değildir (ama çözüme yaklaşır), çünkü hazırlanmakta olan kataloğun adını "kendi adını içermeyen, yayımlanmış ya da hazırlanmakta olan kataloglar kataloğu" diye değiştirirsek paradoks ortadan kalkmış olmaz.

Biz şu çözümü önereceğiz: Böyle bir katalog yapılamaz. Yukarıdaki çözümlerde de olduğu gibi tanımlanan nesnenin olamayacağını öne sürdük[3].

Böyle bir şey yapılabilir, ama yapılan bu şey bir katalog değil, olsa olsa bir matalog olur.

V. Matematikte Çelişki. "Matematikte çelişki" kavramı tarih boyunca değişmiştir. Yunanlılar, $\sqrt{2}$ sayısının kesirli sayı olmadığını anlayınca, önce çelişkinin doğada var olduğunu sanmışlar, daha sonra omuz silkip kesirli olmayan sayıların varlığını kabul etmek zorunda kalmışlardır.

Dinsel ve felsefi inançların da matematikçileri çelişkide bıraktığı olmuştur. Örneğin, sonsuz kavramı birçok matematikçiyi "çelişkiye" düşürmüştür. Zenon'un ünlü paradokslarının her biri "sonsuz" kavramından kaynaklanmıştır.

İnanç ve sezgilerle matematiğin çelişmesi, günümüzde kullanılan anlamıyla, matematikte bir çelişki değildir. Bugünkü anlamıyla matematikte çelişki, matematiksel bir tümcenin hem doğruluğunun hem de yanlışlığının kanıtlanmasıdır. Örneğin bugün matematikte kabul edilen aksiyom ve kanıtlama yöntemleriyle $2 \neq 2$ tümcesini kanıtlayabilirseniz o zaman bir çelişki elde etmiş olursunuz (çünkü "$2 = 2$" tümcesi matematikte bilinen bir teoremdir!)

Matematikte çelişki var mıdır? Bu soru matematikçileri uzun yıllar (30 kadar yıl) zorlamıştır. 1931'de Kurt Gödel matematikte çelişkinin olmadığını kanıtlamamızın olanaksız olduğunu kanıtlamıştır. Gödel'in bu teoreminden matematikte çelişki olmadığı sonucu çıkmaz. Gödel yalnızca matematiğin çelişkisiz

[3] "Dünyanın En Güzel Katalogları" adında bir katalog var! ABD'de çıkan bu kataloğun varlığını rahmetli Prof. Dr. Nazif Tepedelenlioğlu'ndan öğrendim.

olduğunun kanıtlanamayacağını kanıtlamıştır[4]. Yazımızın geri kalan bölümünde -sonradan giderilen- matematiksel bir çelişkiyi (paradoksu) konu edeceğiz.

VI. Russell Paradoksunun Tarihçesi. Yukarıda sözünü ettiğimiz paradoksların bir benzerini ünlü matematikçi ve filozof Bertrand Russell 1901'de, daha henüz 28 yaşındayken bulmuştur [R1, sayfa 101-107]. O günün matematiğinin çelişkiden yoksun olmadığını gösteren bu paradoks tahmin edileceği gibi matematiği ve matematikçileri sarsmış ve onları matematiğin temelleri üzerine daha derin düşünmeye zorlamıştır[5].

Russell paradoksunun ortaya çıkışı oldukça trajiktir. Yazmadan edemeyeceğim. Modern mantığın kurucularından sayılan Alman matematikçi ve mantıkçı Frege 1893'te **Aritmetiğin Temelleri** adlı ünlü yapıtının birinci cildini [Fre1] yayımlamıştır. Bu yapıtında Frege aritmetiği sağlam temellere dayanan bir kümeler kuramına indirgemek istemiştir. İkinci cildin [Fre2] yazılması oldukça zaman alır. Belki de bu gecikmenin nedeni, matematikçilerin alışık olmadıkları bir dilde yazılan birinci cildin Frege'nin umduğu ve görmesi gereken ilgiyi görmemesidir. 1902'de yapıtın ikinci cildinin yazılması tamamlanmış

[4]Matematikte çelişki nasıl giderilir? Matematiği değiştirerek! Yani matematikte kabul edilen aksiyomları ve gerekirse kanıt yöntemlerini değiştirerek.

[5]Aslında matematikte ilk ciddi çelişkiyi bulan Bertrand Russell değildi. 1897'de Burali-Forti (1861-1931) adında bir İtalyan Russell paradoksunun bir benzerini bulmuştu [BF]. Burali-Forti paradoksundan Russell'ın haberi vardı. Hatta 1903'te Russell bu paradoksu ortadan kaldırdığını sanmıştı yanlışlıkla [Bertrand Russell, **The Principles of Mathematics**, 1. cilt, Cambridge University Press, Cambridge, İngiltere 1903, sayfa 43]. Bu yayınından iki yıl sonra, Russell, Burali-Forti paradoksunun ko-lay kolay giderilmeyecek önemli bir paradoks olduğunu kavramış ve paradoksu ortadan kaldırmanın yollarını aramıştır [Bertrand Russell, **On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types**, Proceedings of the London Mathematical Society 4 (1905) 29-53]. Russell çözüme tipler kuramını bularak ulaşmıştır [Bertrand Russell, **Mathematical logic as based on the theory of types**, American Journal of Mathematics 30 (1908) 222-262]. Neden bugün Burali-Forti paradoksunun Russell paradoksu kadar tanınmış olmadığını bilmiyorum. Belki de Russell paradoksunun daha kolay anlaşılır olduğundandır.

ve baskıya verilme aşamasına geçilmiştir, hatta belki baskıya da verilmiştir. İşte tam bu sırada, 54 yaşındaki Frege, 30 yaşındaki Russell'dan "Sevgili Meslektaş" diye başlayan 16 Haziran 1902 tarihli bir mektup alır [H, sayfa 124-5]. Bu mektupta Russell, Aritmetiğin Temelleri'nin birinci cildini okuduğunu, çok yararlandığını, çok sevdiğini belirtir, Frege'yi göklere çıkarır, ikinci cildi dört gözle beklediğini söyler. Mektubun ortalarında da bulduğu paradoksu açıklar. Frege mektubu okuduğunda uğradığı düşkırıklığının boyutunu tahmin etmek zor olmasa gerek. Çok emek verdiği yapıtı ve yaşamını adadığı, temelini kurduğunu sandığı bilim birden yokolup gitmiştir. Kitapta temel değişiklikler yapması için çok geçtir. Bir sonsöz yazmakla yetinmek zorunda kalır. Frege, Russell'ın mektubunu 22 Haziran 1902 günü yanıtlar, yani Russell'ın mektubunu yazdığı günden tam altı gün sonra [H, sayfa 127-8]. Bu çok ilginç mektuptan alıntılar sunmak istiyorum:

Sevgili Meslektaş,

16 *Haziran tarihli ilginç mektubunuz için çok teşekkür ederim. Benimle çoğu konuda aynı düşüncede olmanıza ve çalışmamı ayrıntılarıyla tartışmak istemenize sevindim. İsteğiniz üzerine aşağıda adlarını bulacağınız yayınlarımı yolluyorum.* [...]

Sizin elinizle yazıldığını sandığım boş bir zarf geldi postadan. Galiba bana bir şey göndermek istemiştiniz ve o şey yanlışlıkla kayboldu. Eğer kuşkum doğruysa inceliğiniz için teşekkür ederim. Zarfın ön yüzünü mektubuma iliştiriyorum. [...]

Bulduğunuz çelişki beni çok büyük şaşkınlığa -belki büyük üzüntüye demek daha doğru olur- uğrattı, çünkü aritmetik kuramını dayandırdığım temeli sarstı. Bana öyle geliyor ki [...] *beşinci kuralım yanlış* (20. *bölüm, sayfa* 36), 31. *bölümde sunduğum açıklamalar* [*yeterli değil*]. *Durum öylesine ciddi ki,* 5. *kuralın yanlışlığı, salt öne sürdüğüm temeli sarsmakla kalmıyor, galiba aynı zamanda aritmetiğin sağlam bir temele dayandırılamayacağını da gösteriyor.* [...]

Her durumda buluşunuz çok önemli ve -şimdilik bir müjde niteliğini taşımasa da- ileride mantıkta büyük ilerlemelere neden olabilir. [...]

Grundgesetze'nin[6] *ikinci cildi yakında çıkacak. Kitabın sonuna bulduğunuz çelişkiden sözeden bir ek yazacağım elbet. Keşke doğru bakış açısına sahip olsaydım*[7].

Saygılarımla,
G. Frege

Frege kitabının sonsözünün başında şöyle yazar:

Bir biliminsanı için, yapıtı biter bitmez temellerinin yıkılmasından daha korkunç bişey düşünülemez. Yapıt tam baskıya hazırlanırken Bay Bertrand Russell'dan aldığım bir mektup beni işte bu duruma soktu.

VII. Russell Paradoksu: Yazının bundan sonrasında Russell'ın bu paradoksunu açıklamaya çalışacağız[8].

Küme kavramı, Yunanlılardan beri aşağı yukarı biliniyordu. Daha sonra Alman Matematikçi Georg Cantor (1845-1918) kümeler kuramını matematiksel olarak ortaya attı. O zamanlar bir nesnenin küme olabilmesi için birtakım koşulların gerektiği daha bilinmiyordu. Akla gelebilecek tüm nesnelerin bir küme oluşturabileceği sanılıyordu. Hele küme gibi çok "doğal" bir kavramın günün birinde matematiği çelişkiye düşüreceği akıllara hiç gelmiyordu. 19'uncu yüzyılın sonuna dek, matematikçiler gördükleri, düşünebildikleri her matematiksel nesne topluluğuna küme adını vermekten çekinmediler. Tam sayılar kümesi, çift sayılar kümesi, bir düzlemin noktaları kümesi, bir düzlemin

[6] [Fre1, Fre2].

[7] Mektubun aslı Almanca. Yukarıdaki çevirim [H]'deki İngilizce çeviriden. Son tümce İngilizce'ye şöyle çevrilmiş: "If only I had the right point of view for that!" Tam ne anlama geldiğinden emin değilim bu tümcenin. İki anlama gelebilir: Ya Frege kitabını yazarken Russell paradoksunu düşünemediğine hayıflanıyor ya da ek olarak ne yazacağını bilmiyor.

[8] Russell paradoksu, Bertrand Russell'dan bağımsız olarak Zermelo (1871-1953) tarafından da aşağı yukarı aynı tarihlerde bulunmuştur. 1908'de yayımlanan bir yazısına [Z1] Zermelo şöyle bir dipnot düşmüştür: "Bu paradoksu ben de Russell'dan bağımsız olarak bulmuş ve 1903'te aralarında Profesör Hilbert'in de bulunduğu birkaç matematikçiye bildirmiştim."

eğrileri kümesi, bir düzlemin dikdörtgenler kümesi, bu kümelerin bileşimi, bir kümenin altkümeleri kümesi... Her topluluk bir küme oluşturabilirdi. Hatta tüm kümeler topluluğu bile... Küme kavramı o zamanların matematikçileri için sezgisel bir kavramdı. Yıllar boyunca matematikçiler bir kümenin oluşması için kısıtlayıcı koşullara gerek görmediler. Biz de, şimdilik, kümeyi bu anlamda alalım: Herhangi bir öğeler topluluğuna küme adı verilir. Bakalım başımıza neler gelecek.

Eğer x bir kümeyse, x kümesinin belli bir özelliğe sahip öğeleri bir başka küme oluştururlar. x kümesinin bir altkümesidir bu yeni küme. Örneğin, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin "çift olma" özelliğini taşıyan öğeleri, $2\mathbb{N}$ olarak simgelenen çift doğal sayılar kümesini oluştururlar.

Tüm kümelerin bir küme oluşturduğunu varsayalım. Bu kümeye x adını verelim[9]. x kümesi "evrendeki" tüm kümeleri içeriyor. Yukarıdaki $\mathbb{N}$ kümesini de, $2\mathbb{N}$ kümesini de... Yani $\mathbb{N} \in x$ ve $2\mathbb{N} \in x$ matematiksel tümceleri doğru tümcelerdir. Daha genel olarak, eğer t herhangi bir kümeyse, "$t \in x$" matematiksel tümcesi doğrudur. x de bir küme olduğundan, "$x \in x$" matematiksel tümcesi de doğrudur. Demek, x kendi kendisinin bir öğesi. Öte yandan, $\mathbb{N}$ kümesi kendi kendisinin bir öğesi değil, çünkü $\mathbb{N}$ kümesinin öğeleri doğal sayılar ve $\mathbb{N}$ bir doğal sayı değil. Demek ki "$\mathbb{N} \in \mathbb{N}$" matematiksel tümcesi yanlış ve "$\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$" matematiksel tümcesi doğru.

Şimdi x kümesinin "kendini içermez" özelliğini taşıyan öğelerinden oluşan altkümeyi ele alalım. Bu kümeye y adını verirsek, y, kendini içermeyen kümeler kümesidir[10]. Yani y'nin öğeleri kendini öğe olarak içermeyen kümeler. Örneğin, yukarıdaki paragrafa göre, $x \notin y$, ama $\mathbb{N} \in y$.

Matematiksel olarak y'nin tanımı şöyle verilir:

$$y = \{z \in x : z \notin z\}.$$

[9]Kataloglar katalogu gibi, x de kümeler kümesi.

[10]y kümesi, kendi adını içermeyen kataloglar katalogu gibi, kendi kendini öğe olarak içermeyen kümeler kümesi.

Yani her z için,

$$z \in y \Leftrightarrow z \in x \text{ ve } z \notin z$$

önermesi doğrudur. Eğer z'nin bir küme olduğu biliniyorsa, sağdaki $z \in x$ koşulu kaldırabiliriz. Demek ki her z kümesi için,

$$z \in y \Leftrightarrow z \notin z$$

önermesi doğrudur. Burada z yerine y alalım, y bir küme olduğundan buna hakkımız var:

$$y \in y \Leftrightarrow y \notin y$$

önermesini elde ederiz. Bu, bariz bir çelişkidir.

Matematik yerine edebiyatı tercih edenler için: Sorumuz şu: y kümesi, y'nin bir öğesi midir? Yani y kümesi kendisinin bir öğesi midir? Önce y'nin kendi kendisinin bir öğesi olduğunu, yani "$y \in y$" matematiksel tümcesinin doğru olduğunu varsayalım. Eğer y, y'nin bir öğesiyse, o zaman y, y'nin bir öğesi olmamalı, çünkü y, bu tür kümeleri, yani kendisinin öğesi olan kümeleri içermiyor. Şimdi de y'nin kendi kendisinin öğesi olmadığını, yani "$y \in y$" matematiksel tümcesinin doğru olduğunu varsayalım. O zaman (y kümesinin tanımına göre) y, y'nin bir öğesi olmalı. Her iki durumda da bir çelişki elde ettik.

İşte Bertrand Russell'ın paradoksu.

VIII. Çelişki Nasıl Giderildi? Bu paradoks, kümeler kuramının öbür paradoksları gibi, bugün ortadan kalkmıştır. Kümeler kuramını değiştirmek, daha sağlam temellere oturtmak gerekmiştir bunun için. Bertrand Russell, paradoksu ortadan kaldırmak amacıyla, 1908'de **tipler kuramı** adı verilen bir kuram ortaya atmıştı[11]. Tipler kuramı kümeleri derecelendirir. Örneğin, dördüncü dereceden bir kümeyi tanımlamak için ancak birinci, ikinci ve üçüncü dereceden kümeler kullanılabilir. Böylece yukarıda x adını verdiğimiz, "tüm kümeler kümesi"

---

11 [R3]. Tipler kuramına benzer bir kuram [R1]'de de vardır. Ancak Russell bu konuda düşüncelerini bir süre terkedip, [R2]'de paradoksu çözmenin (ya da yok etmenin) başka yollarını aramıştır.

diye bir küme matematikte yasaklanmış olur ve Russell'ın paradoksu paradoks olmaktan çıkar. Yani Russell akla gelen her nesnenin küme olmasını yasaklayarak, matematiği değiştirmiş, (şimdilik) çelişkisiz bir matematik yaratmıştır. Ünlü Fransız matematikçisi Poincaré'nin de dediği gibi, kurtlardan korumak için sürünün çevresine bir çit çekilmiştir, ancak, birazdan da göreceğimiz gibi, çitin içinde kurt olup olmadığını bilmiyoruz.

Russell'ın tipler kuramında çalışmak matematikçilere zor gelmiştir. Örneğin bu kuramda iki kümenin eşit olduğunu kanıtlamak için bin dereden su getirmek gerekir. Matematikçiler zor olan hiçbir şeyi sevmediklerinden, tipler kuramını daha basit bir kuramla değiştirmişlerdir[12].

IX. Matematikte Çelişki Var mıdır? Daha önce de belirttiğimiz gibi bugünkü matematik sisteminde çelişki olmadığını kanıtlayamayız[13]. Gödel kanıtladı bu olanaksızlığı. Peki, matematikte bir gün çelişki bulunursa ne olur? Çelişkisine bağlı elbet... Ama matematikçilerin genel kanısı şu: Gelecekte bir gün matematikte bir çelişki bulunursa, bu çelişki aksiyomlarda ufak tefek bir iki değişiklikle giderilebilir; olası bir çelişki Matematik'i yıkamayacağı gibi, sarsamaz bile, olsa olsa şöyle biraz titretir.

[12]Kümeler kuramının aksiyomlarına kapsama düzenlemesi (comprehension scheme) adı verilen bir aksiyom eklenerek yapılmıştır bu değişiklik. Bu aksiyomeagöre, eğer C bir kümeyse ve $\varphi(x)$ bir formülse, C'nin φ özelliğini taşıyan öğeleri de bir küme oluştururlar. Burada önemli olan j özelliğini taşıyan "evrendeki" tüm öğelerin değil, yalnız C'dekilerin bir küme oluşturmasıdır. Yukarıdaki x nesnesi bu aksiyoma göre oluşturulmadığından, x'in küme olup olmadığından hemen emin olamayız ve bugünün matematiği eğer çelişkisizse x bir küme olamaz elbet, yoksa Russell paradoksuyla bir çelişki elde ederdik.

[13]"Bugünkü matematik sistemi" demekle günümüz matematikçilerinin çoğunun kabul ettiği kümeler kuramı demek istiyorum. ZFC adı verilen bu kuramın ilk aksiyomları 1908'de Zermelo (ZFC'nin Z'si) tarafından bulunmuştur [Z2]. 1920'lerde Fraenkel [Fra] (ZFC'nin F'si), Skolem [S] ve Mirimanov [M] birbirinden bağımsız, yerleştirme aksiyomu (axiom of replacement) adı verilen bir aksiyomun eklenmesini önermişlerdir. ZFC'nin C'siyse seçim aksiyomu (axiom of choice) adı verilen ve yüzyılımızın başında büyük kavgalara neden olan çok özel bir aksiyomu simgeler.

Kaynakça

[BF] Cesare Burali-Forti, *Una questione sui numeri transfiniti*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 8 (1897) 154-164. Yazının İngilizce çevirisi için [H]'ye bakınız.
[Fra] A.A. Fraenkel, *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, Math Ann 86 (1922) 230-237.
[Fre1] Gottlob Frege, **Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet**, 1. cilt, Olms, Almanya, 1893.
[Fre2] Gottlob Frege, **Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet**, 2. cilt Olms, Hildesheim 1903.
[H] Jean van Heijenoort, **From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic**, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, ABD, 1967.
[M] D. Mirimanov, *Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles*, Enseig. Math. 19 (1917) 37-52.
[R1] Bertrand Russell, **The Principles of Mathematics**, 1. cilt, Cambridge University Press, Cambridge, İngiltere 1903.
[R2] Bertrand Russell, *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*, Proc. of the London Mathematical Society 4 (1905) 29-53.
[R3] Bertrand Russell, *Mathematical logic as based on the theory of types*, American Journal of Mathematics 30 (1908) 222-262.
[S] T. Skolem, **Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls...**, Skrifter utgit av Videnskappsekkapet i Kristiania, I Klasse, 3 (Oslo 1919.)
[Z1] Ernst Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Mathematische Annalen 65 (1908) 107-128.
[Z2] Ernst Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Mathematische Annalen 65 (1908) 261-281.
İnternetten:
Bertrand Russell Gallery: `http://www.humanities.mcmaster.ca/~bertrand/`
Bertrand Russell Archives: `http://www.mcmaster.ca/russdocs/russell1.htm#beginning`
Bertrand Russell Research Center: `http://www.humanities.mcmaster.ca/~russell/`
Bertrand Russell Society: `http://www.users.drew.edu/~jlenz/brs.html`
Bertrand Russell Studies: `http://www.humanities.mcmaster.ca/~russell/journal.htm`

Gottlob Frege, `http://plato.stanford.edu/entries/frege/`

Hilbert'in Programı ve Gödel'in Teoremleri

Bütün gün dalga geçebilmek herkes gibi matematikçinin de en tatlı düşüdür. Matematikçi ne zaman dalga geçmeye hak kazanır? Kanıtlanacak teorem, yanıtlanmamış soru kalmadığında, daha doğrusu tüm matematiksel sorular bilgisayarlar tarafından yanıtlanabildiğinde. İşte matematikçinin düşü budur. Matematiksel bir dilde sorulacak bir sorunuz mu var, verin bilgisayara, bekleyin, sonlu bir zaman sonra bilgisayar sorunuzun yanıtını size sunsun... Bu "sonlu zaman" bilgisayarın gücüne göre değişebilir, ama burada bu sonlu zamanın ne denli sonlu olduğu bizi ilgilendirmiyor. İster beş dakika, ister beş yüzyıl olsun, isterse de evrenin yaşını aşsın. Sonlu zaman olsun da... Öyle bir yöntem (buna bilgisayar yazılımı da diyebilirsiniz) bulmalı ki, hiç düşünmeye gerek kalmadan sorulan matematiksel bir soru bu yöntemle çözülsün. Sor sorunu, uygula yöntemini, al yanıtını...

Bu düş gerçekleşebilir mi? İşte bu yazının konularından biri de bu.

"Russsell'ın Paradoksu" başlıklı yazıda matematikte bulunan bir çelişkiden sözetmiştim. Bu çelişkiyi Bertrand Russell ve başkaları gidermiştir. Çelişki giderilmesine giderilmiştir ama matematikçilerde bir de kuşku yaratmıştır: Matematikte başka çelişki var mıdır? Matematikte çelişki olmadığından nasıl emin olabiliriz?

Bu soruyu matematikçilerin sormaları son derece doğal. Yaşamlarını adadıkları uğraş alanı çelişkiliyse beş para etmez. Matematik, doğanın ve doğaya hükmeden yasaların anlaşılmasını sağlamalıdır. Oysa, örneğin, "$1 = 2$" önermesinin kanıtlanması bu amacın biraz uzağında olduğumuzu göstermez mi?



David Hilbert

Matematikte çelişkinin olup olmadığının bilinmemesi rahatsız edici bir durum. Şimdiye dek başını birazcık kaldırma yürekliliğini gösterebilen çelişkilerin yokedilmesi rahatlamamız için yeterli bir neden değil. Her an kıyıda köşede bekleyen bir başka çelişkiyle karşılaşabiliriz. Daha da kötüsü olabilir, ayrımsamadan bir çelişkiyi bir teoremin kanıtında kullanabiliriz. Ve çelişkinin yardımıyla kanıtlanan o teorem, günün birinde -farzı mahal- çok hızlı uçakların yapımında kullanılabilir ve kullanılan teorem yanlış olduğundan, uçak yerinden kımıldamayabilir, hatta belki de uçak kalkar da duramaz. Demek istediğim, iş ciddi, hafife almaya gelmez.

David Hilbert[1] (1862-1943) bu sorunu ciddiye alıp bir çare aranmasını isteyen ilk matematikçidir. Hilbert, bugün adıyla anılan bir program öngörür. Bu programa göre matematik biçimselleştirilmelidir. Örneğin aksiyomlar açık seçik bir kâğıda yazılmalıdır ki herkes neyin aksiyom olup neyin olmadığını bilebilsin. Yalnız aksiyomlar değil, kanıtlama yöntemleri de belirtilmelidir. Yani matematiksel bir kanıtın ne olduğu, nasıl yapıldığı bilinmelidir. Çıkarım kuralları teker teker yazılmalıdır bir kâğıda, ki hangi önermenin hangi önermelerden çıkarılabileceğini bilelim, ki her aklına esen "işte bir teorem kanıtladım" diye ortaya çıkamasın. Yani, bir bakıma, matematik dünyası disiplin altına alınmalıdır.

Bu kolay. Matematik biçimselleştirilebilir. Çıkarım kuralları kâğıt üstüne dökülebilir. Bunda bir sorun yok.

[1] Hilbert'in yaşamöyküsü için bkz. [Constance Reid, **Hilbert - Courant**, Springer-Verlag 1986].

Hilbert'in başka istekleri de vardır. Örneğin, hangi teoremin kanıtlanıp kanıtlanmadığı konusunda matematikçiler kavga etmesinler ister. Hangi kanıtın doğru, hangi kanıtın yanlış olduğu sorusuna kolaylıkla karar verilebilsin.

Bu istek de -kuramsal olarak en azından- karşılanır. Yeterli zamanımızın olduğunu varsayarsak, her matematiksel kanıt biçimselleştirilebilir, bu biçimselleştirilmiş kanıt bir bilgisayara verilebilir, ve bilgisayar sonlu bir zamanda kanıtın doğru ya da yanlış olduğunu bize söyler. Uygulamada zaman sorunumuz varsa da, kuramsal olarak bir sorun yok.

Hilbert bu isteklerle yetinmez. Asıl amacı matematikçileri çelişki korkusundan kurtarmak değil miydi? Bir iki dileği daha vardır. Geliştirilen bu matematik sisteminde matematiğin çelişkisiz olduğu kanıtlanmalıdır.

Matematiğin çelişkisiz olduğu kanıtlanacak... Emirle, ricayla, yalvarıp yakarmakla teorem kanıtlanmıyor ki. Bu zorlu bir teorem.

1930'da Kurt Gödel bir teorem kanıtlar. Hatta iki teorem kanıtlar. Bu teoremler pek Hilbert'in istediği, umduğu teoremler değildir. Ama matematikte her zaman umulan bulunmuyor.

Gödel'in kanıtladığı teoremlerden biri şu teoremdir:

Teorem 1. *Matematiğin çelişkisiz olduğu kanıtlanamaz.*

Teorem, "matematiğin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamadım, denedim yapamadım" demiyor. "Kanıtlanamaz" diyor. Yani boşu boşuna kimse denememeli. Kanıtlanamaz! Matematiğin çelişkisiz olduğunu anlamak olanaksızdır.

Öte yandan matematiğin çelişkili olduğu kanıtlanabilir. Nasıl kanıtlanır? Bir çelişki bulunursa kanıtlanır! Şimdilik böyle bir çelişki bulunamamıştır. Bulunabileceğini de sanmıyorum. Çelişki bulunduğunda dünyanın -ya da matematiğin- sonu gelmez, matematikte bir iki küçük değişiklikle çelişki giderilir diye düşünüyorum. Bu kanımda yalnız değilim. Matematikçilerin çoğu benim gibi düşünür.

Hilbert'in isteklerinden biri de, doğal sayılarla ve toplamayla ve çarpmayla ilgili her α önermesi için, ya α'nın ya

da $\neg\alpha$'nın (yani α'nın yanlışlığının) kanıtlanabilmesi olabilirdi. Hilbert şöyle düşünmüş olabilir: Böyle bir önerme doğal sayılarda ya doğrudur ya da yanlıştır; doğruysa kanıtlanmalı, yanlışsa o önermenin olumsuzu kanıtlanmalı. Örneğin, her doğal sayı dört tamsayının karelerinin toplamına eşitse, bu önerme kanıtlanmalı; eşit değilse, dört tamsayının karelerinin toplamı olmayan bir doğal sayının varlığı kanıtlanmalı.

Yukarıda Gödel'in ikinci bir teorem daha kanıtladığını söylemiştim. Gödel'in ikinci teoremi Hilbert'in bu olası isteğine de olumsuz yanıt verir. Yani doğal sayılar ve toplama ve çarpma işlemleriyle ilgili her önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanabilir mi? Gödel'in yanıtı şöyle: Hayır! Teorem olarak yazacak olursak, Gödel şunu kanıtlar:

Teorem 2. *Doğal sayılarla, toplamayla ve çarpmayla ilgili öyle bir önerme vardır ki, aritmetik kuramının kabul edilen aksiyomlarıyla ne bu önerme ne de bu önermenin olumsuzu kanıtlanabilir*[2].

Aritmetik kuramının aksiyomları nelerdir? Bu aksiyomlar bildiğimiz önermelerdir. Örneğin, aksiyomlardan biri, her x, y, z için,

$$x(y+z) = xy + xz$$

der, bir başkası her x, y, z için,

$$x + (y+z) = (x+y) + z$$

der. Bunlar gibi herkesin bildiği önermelerdir aritmetik kuramının aksiyomları[3]. Gödel öyle bir a önermesi bulur ki bu aksiyomlardan ne α ne de $\neg\alpha$ kanıtlanabilir. Çok önemli bir noktaya okurun dikkatini çekmek istiyorum. Ya α ya da $\neg\alpha$ önermesi (ikisinden biri ve yalnızca biri) doğal sayılarda doğrudur.

[2]Gödel'in bu teoreminin kanıtı için bkz. [Ernest Nagel ve James R. Newman, **Gödel Kanıtlaması, Matematiğin Sırları**, Çeviren Bülent Gözkan, Sarmal Yayınevi 1994].

[3]Bu aksiyomların arasında tümevarımla kanıtı olanaklı kılan bir aksiyom ailesi vardır. Bu aksiyomlardan sayfa 131'de xxx sözettik.

Çünkü, bir önerme doğru değilse, o önermenin tersi, yani olumsuzu doğrudur. Ama "doğru olmak"la "kanıtlanmak" ayrı kavramlar. Gödel'in bulduğu en önemli olgu budur. Bir önerme doğru olabilir ama kanıtlanamayabilir. Çünkü doğru olarak kabul edilen aksiyomlar o önermenin kanıtlanması için yeterli olmayabilirler, zayıf kalabilirler. Sonuç:

Teorem 3. *Doğal sayılarla, toplamayla ve çarpmayla ilgili doğru ama kanıtlanamayan bir önerme vardır.*

Okurun aklına son derece ilginç bir düşünce gelebilir şu anda. Okur şöyle düşünebilir:

– Madem, diyebilir okur, ne α'yı ne de $\neg\alpha$'yı kanıtlayabiliyorum, ikisinden birini (örneğin doğal sayılarda doğru olanını) aksiyom olarak kabul edeyim, diyelim, α'yı eski aksiyomlarımın arasına sokayım. Böylece daha zengin bir kuram elde ederim. Bu yeni kuramda ne kendisini ne de olumsuzunu kanıtlayabileceğim bir başka önerme bulunabilir mi?

Okurun kafasından geçenler Gödel'in de kafasından geçmiştir. Öyle bir β önermesi bulur ki, bu daha zengin kuramda da ne β ne de $\neg\beta$ kanıtlanabilir.

O zaman okur β'yı da eklemek isteyebilir aksiyomlarına. Eklesin. Gödel boş durmaz. Bu kez ne kendisinin ne de tersinin kanıtlanabileceği bir γ önermesi bulur. Gödel'le okur arasındaki bu oyun böylece sürer gider.

Bu oyundan sıkılan okurun aklına bu kez şu düşünce gelebilir:

– Doğal sayılarla, toplamayla ve çarpmayla ilgilenmiyor muyuz? İlgileniyoruz. Ve ne istiyoruz? Herhangi bir α önermesi için, ya α'nın ya da $\neg\alpha$'nın bir teorem olmasını istiyoruz. Güzel... Doğal sayılardan, toplamadan ve çarpmadan sözeden tüm önermelerden doğal sayılar kümesinde doğru olanlarını seçelim. Bu önermeleri aksiyom olarak kabul edelim. Herhangi bir önerme ya doğru ya da yanlış olduğundan, her α önermesi için ya α ya da $\neg\alpha$ aksiyomdur; dolayısıyla ya α ya da $\neg\alpha$ bir teoremdir[4].

[4]Her aksiyom bir teoremdir. Hem de bir satırlık kanıtı olan bir teorem!

Bu olağanüstü güzel düşünce ne yazık ki soruna çare değildir. Aksiyomların bir işe yarayabilmesi için hangi önermenin aksiyom, hangi önermenin aksiyom olmadığını bilebilmeliyiz. Yani elimizde hangi önermenin aksiyom olduğuna karar verebilecek bir algoritma (ya da bir bilgisayar yazılımı) olmalı. Öyle değil mi? Hangi önermenin aksiyom olduğu bilinmeden, hangi önermenin teorem olduğu bilinebilir mi? Aksiyomlar da birer teorem değil midirler? Gödel işte burada da bir kez daha ortaya çıkar:

Teorem 4. *Toplama ve çarpmayla ilgili önermelerden hangilerinin doğal sayılarda doğru olduğuna karar verebilecek bir bilgisayar yazılımı yapılamaz.*

Gödel bir kez daha, kesin olarak "yapılamaz" diyor. "Denemeye kalkışmayın," diyor "boşu boşuna yorulacaksınız."

Şimdi, yazının başında sözettiğim matematikçi düşüne geri dönelim. Matematikçi tembellik yapabilir mi? Teoremlerini bir bilgisayara kanıtlattırabilir mi? Neyin doğru, neyin yanlış olduğuna bir bilgisayarla karar verebilir mi? Üçüncü teoreme göre veremez. Toplama ve çarpma gibi en başat ve en basit kavramlarla ilgili sorular bile yanıtsız kalabilir.

Gödel'in Bir Başka Teoremi

Kuramla uygulama uyumlu bir yaşam içinde midir? Kuramsal olarak kanıtlanmış bir önerme, uygulamada da geçerli midir, gerçekten doğru mudur? Örneğin, $1,4 < \sqrt{2}$ önermesinin bir kanıtı varsa (ki var), bu önerme gerçekten doğru mudur? Yani evdeki hesap çarşıya hep uyar mı? Daha matematiksel bir deyişle, bir matematik kuramında kanıtlanan bir teorem, o kuramın modellerinde de geçerli midir?

Yanıt pek şaşırtıcı değil, çünkü yanıt EVET'tir, yani bir kuramda kanıtlanan her teorem o kuramın modellerinde doğrudur.

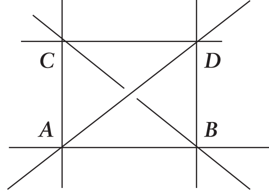
Yukarıda, matematiksel bir kuramdan ve bu kuramın modellerinden sözettik. Sorumuzun ve yanıtının anlam kazanabilmeleri için bu iki kavramın açıklanması gerekiyor.

Her matematik kuramının bir aksiyomlar kümesi vardır. Örneğin, aksiyomlardan biri, "herhangi bir doğruya herhangi bir noktadan bir paralel[1] geçer," olabilir. Bir başkası, "En az dört tane nokta vardır," olabilir.

Çelişkisiz her matematik kuramının modelleri vardır. Bir kuramın modeli her şeyden önce bir kümedir. Bu kümede, kuramda (yani aksiyomlarda) adı geçen nesneler tanımlanır. Ve o kuramın aksiyomlarının geçerli olması istenir. Yukarıdaki iki

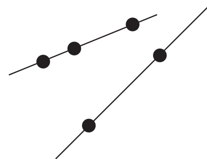
[1]Bu yazıda, ortak noktaları olmayan (yani kesişmeyen) iki doğruya koşut doğrular diyoruz. Ayrıca bir doğrunun kendisine koşut olduğunu da varsayıyoruz.

aksiyomdan oluşan kuramın modellerinde, önce nokta ve doğru kavramları tanımlanır; ve bu tanımlar öyle yapılır ki her noktadan her doğruya gerçekten bir koşut geçer ve gerçekten o modelde en az dört tane nokta vardır. Örneğin, ortaokuldan bildiğimiz iki boyutlu Öklid uzayı bu iki aksiyomdan oluşan kuramın bir modelidir. Bu kuramın bir başka modelini daha bulalım. Bu modelde yalnızca 4 tane noktamız olsun: A, B, C ve D noktaları. 6 tane doğrumuz olacak. Bu doğrulara AB, CD, AC, BD, AD ve BC adını verelim. Son olarak, hangi noktanın hangi doğrunun üstünde olduğunu söyleyelim: AB doğrusunun yalnızca iki noktası vardır, A ve B noktaları; BC doğrusunun yalnızca iki noktası vardır, B ve C noktaları, vb. Modelimizi açıkladık. Bu modelin aşağıda bir de resmini çizelim:



Bu modelde kuramımızın aksiyomları gerçekten doğrudur. Örneğin, C noktasından AB doğrusuna bir koşut geçer: CD doğrusu. A noktasından CB doğrusuna bir koşut geçer: AD doğrusu. Her ne kadar, resimde AD doğrusuyla CB doğrusu kesişiyor gibi gözüküyorlarsa da, aslında kesişmezler, çünkü modelimizde yalnızca dört nokta vardır, ve resimde kesiştikleri nokta modelimizde değildir.

Yukarıdaki iki aksiyomdan oluşan kuramın başka modelleri de vardır. Bu kurama beş noktalı ve iki doğrulu bir model örneği daha verelim:



Elbet matematikte önemi olan kuramlar ve modeller çok

daha karmaşıktırlar. Burada basit örnekler vererek kavramların kolayca anlaşılmalarını sağlamak istedim.

Gördüğümüz gibi bir kuramın birçok modeli olabiliyor.

Bir kuramda çalışan matematikçi, aksiyomları doğru olarak kabul eder ve o aksiyomlardan yola çıkarak teoremler kanıtlar. Örneğin,

$$2 + 2 = 4$$

eşitliği aritmetik kuramının; "Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir," önermesi bildiğimiz Öklid (düzlem) geometrisinin teoremleridir.

Şimdi yukarıda sorduğumuz soruyu bir kez daha soralım. Bir matematik kuramında kanıtlanmış bir teorem, o kuramın modellerinde doğru mudur? Yanıtı daha önce vermiştik. Evet! Örneğin

$$2 + 2 = 4$$

aritmetik kuramının bir teoremi olduğundan, aritmetik kuramının her modelinde bu eşitlik geçerlidir.

Bundan da şu çıkar: Bir önerme, bir kuramın bir modelinde yanlışsa, o kuramda o önermenin kanıtı olamaz. Çünkü kanıtı olsaydı, o önerme kuramın her modelinde doğru olurdu. Örneğin, yukarıdaki 5 noktalı modelde her iki noktadan bir doğru geçmiyor. Demek ki, o iki aksiyomdan oluşan kuramda "Her iki noktadan bir doğru geçer" önermesi bir teorem değildir. Bu önermenin karşıönermesi de, yani, "Hiçbir doğrunun üstünden geçmediği iki nokta vardır" önermesi de bir teorem değildir. Çünkü dört noktalı modelde bu karşı önerme yanlıştır.

Şimdi yazının ilginç bölümüne geldik. Yukarıdaki soruyu tersyüz edelim. Bir kuramın bütün modellerinde geçerli olan matematiksel bir önerme, o kuramda kanıtlanabilir mi, yani bir teorem midir? Daha felsefi bir dille, her zaman doğru olan kanıtlanabilir mi? Bu soru gerçekten ilginç ve önemli bir sorudur. Kanıtlama yöntemlerimiz, yani matematik, gerçeklerin kâğıt üstünde gösterilmesine yeterli midir? Yoksa daha güçlü bir matematiğe mi gereksiniyoruz?

Yanıtı vermeden önce bu sorunun uygulamada pek işimize yaramayacağı olgusuna parmak basalım. Genellikle bir kuramın

sonsuz tane modeli vardır. Bu sonsuz tane modelin her birine teker teker bakamayacağımızdan, bir önermenin her modelde doğru olup olmadığını anlayamayız. Uygulama alanı bulunmasa bile bu sorunun ve yanıtının kuramsal matematik ve düşünce ve matematik tarihinde yeri çok önemlidir.

Bu ikinci sorunun da yanıtı evet'tir. Kurt Gödel 1930 yılları civarında bu soruyu "evet" olarak yanıtladığında yüzyılımızın en önemli teoremlerinden birini kanıtladığının bilincindeydi, her ne kadar bir önceki yazıdaki teoremler kadar gürültü koparmadıysa da. Gödel'in bu teoremi ***matematiksel mantık*** denilen konunun en önemli teoremlerinden biridir.

Gödel'in Eksiklik Teoremi

Cem Say[1]

Yıl 1900. Aydınlanma'dan beri bilime, dolayısıyla matematiğe olan inanç giderek artmaktadır. İnsanlık büyük bir iyimserlik içindedir. Fransız Henri Poincaré'yle birlikte zamanının en büyük iki matematikçisinden biri olan Alman David Hilbert doğru olan her şeyin kanıtlanabileceği ve ayrıca matematiğin çelişkisiz olduğu savlarını ortaya atar. Kanıtı yoktur ama öyle olmalı diye düşünür.

Yıl 1931. David Hilbert 70'ine merdiven dayamıştır ve daha 12 yıl yaşayacaktır. Kurt Gödel ise 25 yaşında gencecik bir matematikçidir. Birinci sanının yanlış olduğunu kanıtlar: Doğru olan her şey kanıtlanamaz! Buna ***Eksiklik Teoremi*** adı verilir.

Kanıtlanan her önerme doğrudur, bunu anlamak kolay. "Her doğru önerme kanıtlanır mı?" sorusu çok çok daha zor.

Gödel ayrıca matematiğin çelişkisiz olduğunun kanıtlanamayacağını da kanıtlar! (Matematiğin çelişkili olduğu -eğer matematik çelişkiliyse elbet!- kanıtlanabilir; bunun için örneğin $1 = 2$ eşitliğini kanıtlamak yeterlidir.)

Böylece iyimserliğe büyük bir (hatta iki!) darbe vurulmuştur. Matematik sanıldığı gibi her şeye muktedir değildir...

Eksiklik Teoremi matematik hakkındaki düşüncelerimizi derinden etkilemiştir.

[1]Boğaziçi Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü öğretim üyesi.

Bu yazıda niyetim, Eksiklik Teoremi'ni kendi anladığım şekilde ana hatlarıyla, herkesin anlayabileceğini umduğum bir biçimde anlatmak.

Program. Önce azıcık programlardan sözetmeliyiz. Kaygılanmayın, çoğu okurun bilgisayar programlamayı bilmediğini biliyorum. (Bence matematikle ilgilenen biri için büyük eksiklik ama neyse...) Bu yüzden bu yazıdaki tüm programları Türkçe yazacağım. Ama bunun karşılığında, gerektiğinde tüm yazdıklarımın biçimsel bir programlama diline çevrilebileceğine inanmanızı isteyeceğim.

Belli bir işi yapmak için tasarlanmış sonlu bir komut dizisine ***program*** denir. Örneğin,

1. A kâğıdına "Merhaba" dizisini yaz.

bir programdır.

Dizi, harf, noktalama işareti, rakam, bilumum matematiksel simge ve hatta "boşluk" gibi bu kitapta görülebilen simgelerden canımızın istediği kadarını yanyana yazarak elde edebileceğimiz sonlu bir metin demektir.

Bir ***programı çalıştırmak***, programın dediklerini sırayla yapmak demektir. Yani aslında "çalışan" program değil, onun dediklerini yapan her kimse o oluyor, ama bu kelime dile yerleşmiş bir kere.

Sözgelimi, yukarıdaki programı çalıştırdığımızda yapmamız gereken, "Merhaba" kelimesini bu iş için önceden hazırladığımız A adını verdiğimiz bir kâğıda yazmaktır. Daha karmaşık programlarda birden fazla kâğıt kullanıldığından, programda kullanılan kâğıtlara A, B gibi adlar verilir.

"Bellek yetersiz" gibi uyarılara maruz kalmamak için bu kâğıtların sonsuz boyda olduğunu, yani üstlerinde yazılı olan metnin öncesine veya sonrasına ne kadar çok yeni şey yazarsak yazalım kâğıtların dolmayacaklarını varsayacağız. Yalnız yazılan her şeyin uzunluğu her an sonlu olacak.

Azıcık daha karmaşık bir program görelim:

1. A kâğıdına " ␣müdür" dizisini yaz. (Boşluğa dikkat!)
2. A'daki metni B kâğıdına kopyala.

3. A'daki metnin ardına iki kez B'deki metni, sonra da "?" dizisini yaz.

Bu yeni programın ilkinden iki farkı var. Birinci fark, ilki gibi tek değil, ardarda üç komuttan oluşması. Programı çalıştırdığımızda bu üç komutu bu sırayla ardarda uygulamamız gerekli. İkinci fark da, bu programda iki kâğıdın kullanılması. Kuşkusuz, bu programın yaptığı işin aynısını şu daha kısa programın çok daha dolambaçsız bir şekilde yapabileceğini fark etmişsinizdir:

1. A kâğıdına "␣müdür müdür müdür?" dizisini yaz.
2. B kâğıdına "␣müdür" dizisini yaz.

Programlarda bazen boşluk kullanmak zorunda kalacağız (hani iki kelime arasına konanlardan). İyice görünsünler diye kimi zaman bu boşlukları yukarıda yaptığımız gibi ␣ simgesiyle göstereceğiz.

Duran ve Durmayan Programlar. Şu programa bakalım:

1. A kâğıdını sil.
2. B kâğıdını sil.
3. A'daki diziyi B'deki dizinin sağına kopyala.
4. A kâğıdındaki diziyi sil, yerine *sıralamada* ondan bir sonra gelen diziyi yaz.
5. 3 numaralı komuta dön.

Bu programın ne yaptığını anlayabilmemiz için dizilerin kendi aralarında nasıl sıralandıklarını bilmemiz gerekli. İçinde hiçbir şey yazmayan diziye ***boşdizi*** denilir. Boşdizi, dizilerarası sıralamanın ilk elemanıdır. Diğer dizileri sıralayabilmemiz için, önce kullandığımız simgeler arasında bir sıralama tanımlamamız gerekir. Örneği kolaylaştırmak için dizilerimizde sadece Türkçe büyük harflerin kullanılabildiğini varsayalım ve bunların da alfabe sırasına göre sıralandıklarını (yani A'nın ilk, Z'nin de son simge olduğunu) düşünelim. Bu durumda farklı iki diziden hangisinin sıralamada daha önce gelmesi gerektiği, şu iki kural kullanılarak belirlenir:

i. Eğer dizilerin boyları (içlerindeki simge sayısı) farklıysa, kısa olan önce gelir.

ii. Aksi takdirde, iki diziyi soldan sağa doğru simge simge

karşılaştırırız. Önce hangisinde öbüründeki simgeden önce gelen bir simge görürsek önce gelmesi gereken dizi odur.

Yani dizileri önce uzunluklarına göre, sonra alfabetik sıralamalarına göre sıralıyoruz. Örneğin "MÜDÜR" dizisi "MOTORLAR" dizisinden önce, ama "MOTOR" dizisinden sonra gelir.

Şimdi programımızı inceleyebiliriz. Başlangıçta iki kâğıdı da sildiğimizden ikisinin de içinde boşdizi yazılı. Döngünün içinde sürekli B kâğıdındaki metni uzatıyoruz. Nasıl? Her dönüşte sağına sıradaki diziyi ekleyerek. Yani B kâğıdına (yine sadece Türkçe büyük harfleri kullandığımızı varsayarak) "ABCÇDEFGĞHIİJKLMNOÖPRSŞTUÜVYZAAABACAÇ..." diye başlayan ve hiç bitmeyecek bir metin yazmakla meşgulüz. (Sıralamamızda Z'den sonra AA gelir, daha sonra da sırayla AB, AC, AÇ, ..., AZ, BA, BB, ..., ZZ, AAA, ...)

Bu program sonsuza kadar devam eder ve hiç durmaz.

İçinde döngü olan her program ille de sonsuza dek çalışacak diye bir zorunluluk yok. Sözgelimi:

1. A kâğıdını sil.
2. B kâğıdını sil.
3. A'daki diziyi B'deki dizinin sağına kopyala.
4. A kâğıdını sil, yerine sıralamada ondan bir sonra gelen diziyi yaz.
5. A'daki dizide 1'den fazla simge varsa DUR.
6. 3 numaralı komuta dön.

DUR komutu uygulandığında program çalışmasını oracıkta bitirir. Yani yukarıdaki programın çalışması sonlu sayıda adımdan sonra duracak ve (yine sadece Türkçe büyük harfleri kullandığımızı varsayarsak) o anda A kâğıdında AA, B kâğıdında da ABCÇDEFGĞHIİJKLMNOÖPRSŞTUÜVYZ metni yazılı olacaktır.

Gödel Teoremi. Gördüğümüz gibi, kimi programlar sonsuza dek çalışıyor, yani hiç durmuyor, kimileriyse sonlu sayıda adımdan sonra duruyor. Böylece programlar kümesini "duranlar" ve "durmayanlar" olarak ikiye ayırabiliriz. Ayrıca "Falanca program sonlu zamanda durur" veya "Filanca program durmaz"

gibi önermeler kurup bunların doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlamaya uğraşabiliriz. Artık Gödel Teoremi'ni yazabilecek aşamaya geldik:

Gödel Teoremi. *Programların durma ya da durmama özelliklerinin kanıtlanabildiği ve kanıtlanabilen tüm önermelerin doğru olduğu her biçimsel sistemde kanıtlanamayan doğru önermeler vardır.*

Üstelik, birazdan göreceğimiz üzere, kanıtlanamayan (ve teoremde varlığı söylenen) bu doğru önermelerden birini açıkça yazabiliriz de.

Doğru bir önermenin kanıtlanamaması herhalde her duyarlı insanı etkiler.

Kanıt Kavramı. Burada "biçimsel" sözcüğü önemli. Önermelerimizi fazlaca "elastik" olan Türkçe gibi "doğal" dillerle değil, her tümceye tek bir anlam yüklenebilen biçimsel bir yazım şekli kullanarak ifade etmeliyiz, örneğin

sonsuz sayıda asal sayı vardır

demek yerine

$$\forall q\, \exists p\, [p > q \wedge \forall x,\, y\, (x,\, y > 1 \rightarrow xy \neq p)]$$

demek gibi. (Bu formülün ne demek olduğunu anlamıyorsanız, dert edinmeyin, formül sadece her q sayısından daha büyük bir p asalı olduğunu, yani sonsuz tane asal sayının olduğunu biçimsel bir biçimde söylüyor.) Aynı şekilde kanıtlarımız da biçimsel olmalı. Biçimsel kanıt ne demek peki?

Her kanıt, ***aksiyom*** adını verdiğimiz, doğruluğu tartışmasız kabul edilen kimi önermelerden başlayıp, yine doğruluğu tartışılmayan kimi basit ***çıkarım kuralları*** kullanılarak yeni önermelerin ardarda yazılmasından oluşur. Sistemimizde kullanmaya karar verdiğiniz aksiyomların (tabii ki biçimsel yazımla) mevcut olduğunu, kanıtların bir satırından ötekine giderken kullanılabilecek çıkarım kurallarının da en baştan belirlenip sisteme yerleştirildiğini varsayıyoruz. Bu durumda

$$\ddot{O}_n$$

önermesinin ***biçimsel kanıtı*** derken, her Ö_i önermesinin ya aksiyomlarımızdan biri olduğu ya da kendisinden önceki önermelere dayanılarak çıkarım kurallarıyla oluşturulduğu

$$\ddot{O}_1,\ \ddot{O}_2,\ \ldots,\ \ddot{O}_n$$

şeklindeki bir diziyi kastediyoruz. Epeyce uğraşmayı göze alırsak her düzgün Türkçe kanıtı bu biçimsel dile çevirebiliriz.

Verilen herhangi bir biçimsel kanıtın hatalı olup olmadığı, yani içindeki tüm önermelerin gerçekten de kendilerinden önceki önermelerden ve aksiyomlardan çıkıp çıkmadığı otomatik olarak (yani bir bilgisayar programınca) kontrol edilebilir. İşte biçimsel kanıtların güzelliği budur. Bildiğimiz normal yazı diliyle (örneğin Türkçe) yapılan kanıtlar için aynı işi yapmak çok ama çok daha zordur.

Gödel Teoremi'nin Kanıtı: Kanıtlanamaz doğru önermeler içerdiğini kanıtlayacağımız biçimsel sisteme S diyelim. S'nin aksiyomlarına ve çıkarım kurallarına dayanarak K kâğıdına yazdığımız herhangi bir dizinin S sistemine göre düzgün bir kanıt olup olmadığını kontrol eden programı yazıp bir kenarda hazır tutalım. Bu programı, aşağıda yazacağımız daha büyük bir programın bir parçası olarak kullanacağız birazdan.

Şimdi S sisteminde biçimsel kanıtı olmayan bir önerme yazacağız.

Önce birinci komutu olmayan şu programa bakalım:

2. B kâğıdındaki metni A'ya tırnak içine alarak kopyala.

3. "1. B kâğıdına ␣" dizisini, A'nın içeriğini ve " ␣dizisini yaz.␣" dizisini bu sırayla B'deki metnin öncesine yaz.

4. B'deki metnin öncesine ve sonrasına tırnak işaretleri koy, ardına da " ␣programı durmaz" dizisini yaz.

5. K kâğıdını sil.

6. Eğer K'deki metin B'deki önermenin S sistemine göre kanıtıysa DUR.

7. K'deki diziyi sil, yerine sıralamada ondan bir sonra gelen diziyi yaz.

8. 6 numaralı komuta dön.

Yukarıdaki programa Q programı diyelim. Şimdi, bu Q programının başına

1. B kâğıdına Q dizisini yaz.

komutunu koyarak yeni bir program elde edelim. Bu programa P diyelim. Q uzun bir dizi olduğundan, birinci komutta Q dizisini oluşturan simgeleri tırnak içine alıp yazalım ki bir karışıklık olmasın. İşte P'nin açık hali:

1. B kâğıdına

"2. B kâğıdındaki metni A'ya tırnak içine alarak kopyala.

3. "1. B kâğıdına ␣" dizisini, A'nın içeriğini ve " ␣dizisini yaz. ␣" dizisini bu sırayla B'deki metnin öncesine yaz.

4. B'deki metnin öncesine ve sonrasına tırnak işaretleri koy, ardına da " ␣programı durmaz" dizisini yaz.

5. K kâğıdını sil.

6. Eğer K'deki metin B'deki önermenin S sistemine göre kanıtıysa DUR.

7. K'deki diziyi sil, yerine sıralamada ondan bir sonra gelen diziyi yaz.

8. 6 numaralı komuta dön."

dizisini yaz.

2. B kâğıdındaki metni A'ya tırnak içine alarak kopyala.

3. "1. B kâğıdına ␣" dizisini, A'nın içeriğini ve " ␣dizisini yaz. ␣" dizisini bu sırayla B'deki metnin öncesine yaz.

4. B'deki metnin öncesine ve sonrasına tırnak işaretleri koy, ardına da " ␣programı durmaz" dizisini yaz.

5. K kâğıdını sil.

6. Eğer K'deki metin B'deki önermenin S sistemine göre kanıtıysa DUR.

7. K'deki diziyi sil, yerine sıralamada ondan bir sonra gelen diziyi yaz.

8. 6 numaralı komuta dön.

Kanıtlanamayacağını iddia ettiğimiz önermemiz

P programı durmaz

olsun. Bu önermenin S sisteminde kanıtlanamayacağını kanıtlayacağız. Burada da P derken P'yi oluşturan simgelerin tırnak içine alınmış halini kastediyoruz.

Komutları sırasıyla çalıştırıp programın davranışını anlamaya çalışalım. İlk komut, B kâğıdına Q dizisini yazmamızı söylüyor. Bunu yapalım. İşte B kâğıdının şu anki hali:

2. B kâğıdındaki metni A'ya tırnak içine alarak kopyala.

3. "1. B kâğıdına⌣" dizisini, A'nın içeriğini ve " ⌣dizisini yaz.⌣" dizisini bu sırayla B'deki metnin öncesine yaz.

4. B'deki metnin öncesine ve sonrasına tırnak işaretleri koy, ardına da " ⌣programı durmaz" dizisini yaz.

5. K kâğıdını sil.

6. Eğer K'deki metin B'deki önermenin S sistemine göre kanıtıysa DUR.

7. K'deki diziyi sil, yerine sıralamada ondan bir sonra gelen diziyi yaz.

8. 6 numaralı komuta dön.

Şimdi programımızın ikinci komutunu uyguladığımızda A kâğıdına aynı dizi tırnak içinde yazılmış olur.

Üçüncü komutu uyguladığımızda B'de oluşan dizi P adını verdiğimiz programımızın ta kendisidir:

1. B kâğıdına

"2. B kâğıdındaki metni A'ya tırnak içine alarak kopyala.

3. "1. B kâğıdına⌣" dizisini, A'nın içeriğini ve " ⌣dizisini yaz.⌣" dizisini bu sırayla B'deki metnin öncesine yaz.

4. B'deki metnin öncesine ve sonrasına tırnak işaretleri koy, ardına da " ⌣programı durmaz" dizisini yaz.

5. K kâğıdını sil.

6. Eğer K'deki metin B'deki önermenin S sistemine göre kanıtıysa DUR.

7. K'deki diziyi sil, yerine sıralamada ondan bir sonra gelen diziyi yaz.

8. 6 numaralı komuta dön."

dizisini yaz.

2. B kâğıdındaki metni A'ya tırnak içine alarak kopyala.

3. "1. B kâğıdına␣" dizisini, A'nın içeriğini ve " ␣dizisini yaz.␣" dizisini bu sırayla B'deki metnin öncesine yaz.

4. B'deki metnin öncesine ve sonrasına tırnak işaretleri koy, ardına da " ␣programı durmaz" dizisini yaz.

5. K kâğıdını sil.

6. Eğer K'deki metin B'deki önermenin S sistemine göre kanıtıysa DUR.

7. K'deki diziyi sil, yerine sıralamada ondan bir sonra gelen diziyi yaz.

8. 6 numaralı komuta dön.

Yani programımızın ilk üç komutunun işlevi, programın kendisinin bir kopyasını B kâğıdına yazmaktır. Demek ki sadece canlılar değil, programlar da üreyebilirmiş!

Şimdi geldik dördüncü komuta. Bu komut uygulandığında B'de oluşan cümle tanıdık gelmeli... Bu cümle S sisteminde kanıtı olmadığını iddia ettiğimiz önermenin ta kendisi. Yani şu anda B'de

P programı durmaz

yazıyor. Bundan sonra B değişmeyeceğinden, bundan sonra B'de hep bu önerme yazacak.

Beşinci adım pek bir şey yapmıyor. Bu adıma ikinci bir kez gelmeyeceğiz. Bu adım, eğer K kâğıdına birileri haberimiz olmadan bir şeyler karalamışsa, bu karalamaların temizlenmesini sağlıyor.

Programın geri kalan 6, 7 ve 8'inci adımlarında, görüldüğü gibi bir döngüye giriyoruz. Bu döngünün her dönüşünde K kâğıdında yeni bir dizi bulunacak. Sıralamaya dikkat edildiği için her türden harf, boşluk, noktalama işareti, simge vs. karışımı eninde sonunda bu döngünün bir dönüşünde K'de yazılı olacak ve elbette olabilecek tüm kanıtlar er ya da geç K'de belirecekler. Yani eğer B'de yazılı olan önermenin S sisteminde bir kanıtı varsa, sonlu sayıda dönüşten sonra o kanıt K'de yazılı olacak ve o dönüşte kontrol başarıyla sonuçlandığından program duracak. Yok eğer S'de bu önermenin bir kanıtı yok ise o zaman bu döngüden asla çıkamayacağımızdan program hiç durmayacak.

Sözün kısası, bu P programı, sadece ve sadece kendi kendisinin durmayacağını söyleyen

P programı durmaz

önermesi S'de kanıtlanabiliyorsa duracak. Şimdi düşünelim: Acaba programımız duracak mı durmayacak mı?

Eğer P programı durursa, o zaman S sisteminde *P programı durmaz* önermesi kanıtlanabiliyor demektir. Yani sistem yanlış bir şeyi kanıtlıyor. Bu da teoremimizin varsayımına aykırı olacaktır. Demek ki programımız durmayacak; o zaman da (bu programın durmayacağını söyleyen) önermemizin doğru olduğunu ve fakat bunun S'de kanıtlanamayacağı sonucunu çıkarmak zorundayız. Kanıt bitmiştir! □

Gödel teoreminin güzelliği, ondan "kaçış" olmamasındadır. S, canınızın istediği herhangi bir aksiyomlar/çıkarımlar sistemi olabilir. Sözgelimi, çağımızdaki matematikçilerin "matematik" dedikleri şey olabilir. Teoremimiz, eğer S (matematikçilerin umduğu gibi) çelişkisizse, o zaman S'de kanıtlanamayan doğru bir önerme olduğunu göstermektedir.

"Peki ama," diyebilirsiniz, "S'de kanıtlanamayan bu yeni önermenin doğru olduğunu artık bildiğime göre, onu S'nin aksiyomları arasına eklesem, böylece 'otomatik olarak' kanıtlanabilir hale getirsem, böylece her doğru önermenin kanıtlanabildiği bir sistem elde etmiş olmaz mıyım?" Olmazsınız, çünkü aksiyomları değiştirdiğinizde artık eski S sistemini terkedip yeni bir sistem kullanmaya başlamış oluyorsunuz. Bu yeni sistemin adına Ş diyelim. Açıkça görülebilir ki Gödel teoremindeki tekniğin aynısını kullanarak bu sefer de (yine çelişkisiz olduğunu varsaydığımız) Ş sisteminde kanıtlanamayacak doğru bir önermeyi yazabiliriz. Bu sonsuza dek böyle gidebilir. Hem çelişkisiz, (yani hiçbir yanlış önermenin kanıtlanamadığı,) hem de her doğru önermenin kanıtlanabileceği bir sistem yoktur, işte o kadar.

Tabii bir de şöyle bir çözüm var: S'nin aksiyomları, doğru olan tüm önermeler olsun. Bu durumda doğru olan her şey kanıtlanabilir. Ama bu yeni S sisteminin de şöyle bir sakıncası

vardır: Bir dizinin bu yeni S sisteminde bir kanıt olup olmadığını anlayacak bir program yazamayız. Gödel'in kanıtı için geliştirdiğimiz P programının 6 numaralı komutunu hatırlayın: Burada bir dizinin S sisteminde bir kanıt olup olmadığını anlayabilen bir program kullanıyoruz. Eğer tüm doğru önermeler aksiyomsa, bu programın işini yapabilmesi için doğru önermeleri yanlış olanlardan ayırt edebilmesi gerekir. Varsayalım ki 6 numaralı komutu yerine getirebiliyoruz, yani S bu yeteneğe sahip. Şimdi, bu yeni S sistemi için P programı durur mu durmaz mı? Eğer "P programı durmaz" önermesi yanlışsa, o zaman bu önerme kanıtlanamaz, kanıtlanamadığından da P programı durmaz, yani önerme doğrudur (kanıtlanan her önerme doğrudur); doğruysa da kanıtlanabilir ve kanıtlanabildiğinden dolayı P programı durur, yani önerme yanlıştır, değil mi? Bu çelişki bize 6 numaralı komutla ilgili varsayımımızın yanlış olması gerektiğini gösterir.

Sonuç 1. *Doğru önermeleri yanlış önermelerden ayırt edebilen bir bilgisayar programı yoktur.*

Develerle Eşekler

Matematiğe Giriş Dersi

Matematik 101 dersindesiniz, ilk dersiniz, birinci gününüz... Hiç matematik bilmediğinizi varsayıyor hocanız... Kümelerden başlayacaksınız matematiğe... İlk dersiniz olduğundan daha önce hiç küme görmediğiniz varsayılıyor.

Nedir küme? Tanımsız bir nesnedir... Tanımlayamayız. Bir kümenin öğeleri (elemanları) olabilir, bir tek bunu biliyorsunuz küme hakkında. Bir kümenin olup olmadığını bile bilmiyorsunuz.

Hocanız tahtaya hiç öğesi olmayan bir kümenin olduğunu yazıyor:

Birinci Aksiyom. *Hiç öğesi olmayan bir küme vardır.*

Bundan böyle bu aksiyomu (yani kararı) kabul edeceksiniz: Hiç öğesi olmayan bir küme vardır!

Başka kümelerin olup olmadığını bilmiyorsunuz ama, hiç olmazsa hiç öğesi olmayan bir kümenin olduğunu (artık) biliyorsunuz, hocanız söyledi!

Hiç öğesi olmayan bir küme örneği mi istiyorsunuz? İşte: Sınıfınızdaki develer bir küme oluşturuyorsa, bu kümenin büyük olasılıkla hiç öğesi yoktur.

Tavuklar kümesinden de söz edebilirdik!

Ya da inekler kümesinden...

Hiç öğesi olmayan birkaç küme birden olabilir... Neden olmasın? Örneğin, sınıfınızdaki develer kümesiyle sınıfınızdaki

eşekler kümesinin öğeleri yoktur. Bu iki küme birbirine eşit midir? Daha doğrusu eşit olmalı mıdır?

Bir öğrenci,

– Bence eşit olmamalı, diyebilir, ne de olsa biri develer kümesi, öbürü eşekler kümesi... Öğeleri farklı...

Beriki,

– Evet ama, diyebilir, bu eşekler kümesi eşeksiz, develer kümesi de devesiz... Eşeksiz eşekler kümesi elbette devesiz develer kümesine eşit olmalı...

– Olmamalı...

– Olmalı...

– Ne yani bu sınıftaki her eşek bir deve mi? (Kahkahalar.)

Öğrenciler iki gruba ayrılabilirler: Hiç öğesi olmayan bir tek kümenin var olmasını isteyenler ve hiç öğesi olmayan birçok değişik kümenin var olabileceğini savunanlar.

Sınıfın en aklıevveli, belki de hoca, hiç öğesi olmayan bir tek kümenin olduğunu kanıtlamaya kalkışabilir:

– A ve B hiç öğesi olmayan iki küme olsun... A'nın B'ye eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz... Nasıl yapacağız?

O anda sınıftan biri,

– Ama, diyebilir, biz iki kümenin ne zaman birbirine eşit olduğunu bilmiyoruz ki...

– Evet, diyebilir bir diğeri, A'nın B'ye eşit olduğunu (ya da olmadığını) kanıtlamak için, her şeyden önce A'nın B'ye eşit olmasının ne demek olduğunu bilmeliyiz...

– Bu konuda bir karar alınmadı, tahtaya aksiyom yazılmadı...

– Evet alınmadı...

– Sadece hiç öğesi olmayan bir kümenin varlığını belirten bir karar aldık... Eşitlik konusuna hiç değinmedik...

– Aynı öğeleri olan kümeler birbirine eşit olsun... diyebilir içinizden biri, belki de siz atarsınız bu güzel fikri...

Hocanız bu kararı kabul edip tahtaya ikinci kararı yazar:

İkinci Aksiyom. *Aynı öğeleri olan iki küme birbirine eşittir.*

Yani A kümesinin her öğesi B kümesinin bir öğesiyse ve B kümesinin her öğesi A kümesinin bir öğesiyse, o zaman A kümesi B kümesine eşit olur. Bu bir karardır. Bundan böyle böyle olacak!

Şimdi hocanız hiç öğesi olmayan bir tek kümenin olduğunu kanıtlayabilir. Şöyle kanıtlar:

– Anımsarsanız, hiç öğesi olmayan iki küme almıştım. Bu iki kümenin birbirine eşit olduğunu kanıtlamak istiyordum... Kümelerimize A ve B adlarını vermiştik...

Heyecanla kanıtın devamını bekliyorsunuzdur. Hocanız sözlerine devam eder:

– Bir anlık gafletle, diyelim ki A kümesi B kümesine eşit değil... O zaman ne olur?

– Ne olur? diye sorarsınız merakla.

– Ne olacak, ya A'da olup da B'de olmayan ya da B'de olup da A'da olmayan bir öğe vardır... İkinci karara (aksiyoma) göre öyle olması gerekir... Evet... Eğer bu iki küme birbirine eşit değilse, ikisinden birinde öbüründe olmayan bir öğe vardır...

– Eeee?.. diye sorabilir bir öğrenci.

– Eeee'si mi var! İki kümenin birinde, öbüründe olmayan bir öğe olacak... diye yanıtlar hoca.

– Eeeee?

– Duymadınız galiba!..

– Duydum, duydum... İki kümenin birinde öbüründe olmayan bir öğe olacak...

– Böyle saçma şey olur mu?

– Nesi saçma ki bunun?

– Dedik ya... İki kümenin birinde bir öğe olacak...

– Aaaa!

– Aaaa ya!.. Bu kümelerin öğeleri yok... Dolayısıyla, birinde olup da öbüründe olmayan bir öğe olamaz...

– Demek ki iki küme birbirine eşit olmak zorunda...

– Evet öyle...

– Yani bu odadaki her eşek aslında bir devedir...

– Evet... Neyse ki odada eşek yok!

Madem hiç öğesi olmayan bir tek küme var, bu kümeye bir ad verelim: **Boşküme!**

Bir sonraki derste hocanız tahtaya bir teorem yazar, bu ikinci teoreminizdir.

Teorem 1. *Boşkümenin her öğesi* $\sqrt{2}$*'ye eşittir.*[1]

Herkes güler.

– Saçma...

– Deli saçması... gibi sözlerle öğrenciler karşı çıkarlar.

– Nasıl doğru olabilir ki, diye sorar biri, boşkümenin hiç öğesi yok ki $\sqrt{2}$'ye eşit olsun!

Bir başkası arkadaşını destekler:

– Doğru... Boşkümenin $\sqrt{2}$'ye eşit olacak hiç öğesi yok...

Hoca,

– Doğru söylüyorsunuz... der. Boşkümenin $\sqrt{2}$'ye eşit olacak öğesi yok. Ama $\sqrt{2}$'ye eşit olmayacak da hiç öğesi yok...

Hoca sözlerine devam eder:

– Bir an için diyelim dediğim yanlış: Varsayalım ki boşkümenin her öğesi $\sqrt{2}$'ye eşit değil. O zaman, boşkümede $\sqrt{2}$'ye eşit olmayan bir öğe olmalı... Ama boşkümede hiç öğe yok ki, boşkümede $\sqrt{2}$'ye eşit olmayan bir öğe olsun! Varsayımımdan bir saçmalık elde ettim. Demek ki boşkümenin her öğesi $\sqrt{2}$'ye eşit...

– Ben inanmıyorum, diyebilir bir öğrenci, aynı akıl yürütmeyle boşkümenin her öğesinin $\sqrt{3}$'e eşit olduğunu da kanıtlayabiliriz. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$'e eşit olmadığından, bu kanıt doğru olamaz.

O zaman hocanız şöyle yanıtlar kuşkucu öğrenciyi:

– Evet, boşkümenin her öğesi $\sqrt{3}$'e de eşittir, ama bundan $\sqrt{2}$'nin $\sqrt{3}$'e eşit olduğu çıkmaz... Çünkü boşkümenin hiç öğesi yok... Eğer boşkümenin bir öğesi olsaydı, o öğe hem $\sqrt{2}$'ye hem de $\sqrt{3}$'e eşit olacağından, $\sqrt{2} = \sqrt{3}$ eşitliğini elde ederdik... Neyse ki boşkümede hiç öğe yok...

"Boşküme" sözcüğünü yazması uzun olduğundan, boşküme yazıda kısaca $\emptyset$ olarak gösterilir.

---

[1] $\sqrt{2}$ her ne ise...

Öğrenciler artık bir küme oduğunu biliyorlar, ama yalnızca bir tek küme olduğunu biliyorlar: Boşküme. Boşkümeden başka küme var mı? Yoksa yaratmak gerekir...

Hiç öğesi olmayan kümeden bir tane olduğundan, yaratacağımız yeni kümelerin öğeleri olmalı... Ne olmalı bu öğeler? Elimizde hiç öğe yok ki... Yoksa önce öğe mi yaratmalıyız? Belki de... Daha iyi bir fikir, geçmişte yarattığımız kümeleri öğe olarak kullanmaktır. Bir kümenin öğeleri de küme olsunlar... Eski kümeleri öğe olarak kullanarak yeni kümeler yaratalım... Elimizde şimdilik bir tek küme olduğundan, öğe olarak şimdilik sadece boşkümeden yararlanabiliriz. Demek ki yaratacağımız ikinci kümenin bir tek öğesi olabilir: Boşküme. Tek bir öğesi olan ve bu tek öğenin boşküme olduğu bir küme yaratalım. Ama daha önce bunu mümkün kılan bir kural koyalım.

Üçüncü Aksiyom. *Eğer x bir kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x'i içeren bir küme vardır.*

Bu yeni küme $\{x\}$ olarak gösterilir. x kümesi bu kümenin bir öğesidir ve bu kümenin başka öğesi yoktur.

Demek ki, bu kararla alınan kümelerin en az bir öğesi var: x; yani bu kararla elde edilen kümeler boşküme olamazlar.

Bu sayede şu kümeler var olur:

$$\emptyset$$
$$\{\emptyset\}$$
$$\{\{\emptyset\}\}$$
$$\{\{\{\emptyset\}\}\}$$
$$\ldots$$

Böylece birbirinden değişik sonsuz tane yeni küme elde edebiliriz. Ancak, şimdilik elde edeceğimiz her kümenin ya sıfır ya da bir öğesi olabilir. İki ya da üç öğeli bir kümenin varlığını gösteremeyiz.

Üç öğeli kümeleri elde etmek için yeni bir kurala ihtiyacımız var:

Dördüncü Aksiyom. *Eğer x ve y birer kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x'in ve y'nin öğelerini içeren bir küme vardır.*

Bu kümeye "x bileşim y" adı verilir ve kısaca $x \cup y$ olarak yazılır.

Örnek:

$$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$\{\{\emptyset\}\} \cup \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}.$$

Ve böylece üç öğeli kümeler, hatta dört öğeli kümeler, hatta hatta, sonlu olmak koşuluyla, dilediğimiz kadar öğesi olan kümeler elde edebiliriz. Örneğin, aynı kuralı peşpeşe dört kez uygulayarak,

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}$$

beş öğeli bir küme elde edebiliriz[2].

Sayılar

Daha 0, 1, 2, 3, 4 gibi sayılarımız yok. Unutmayın ki Matematik 101 dersindeyiz. Sayıları bulmalıyız.

Göreceğimiz üzere, 0, 1, 2, 3 gibi sayıların matematiksel tanımlarının, günlük hayattaki tanımlarıyla neredeyse hiçbir ilgisi olmayacak. Örneğin, $2 + 2 = 4$ eşitliğini kanıtlamak için, ilkokulda yapıldığı gibi, iki elmaya iki elma daha eklemeyeceğiz, matematiksel tanımlardan yola çıkacağız, 2'nin, 4'ün ve toplamanın tanımından...

Önce sıfırı (0) tanımlayalım:

$$0 = \emptyset. \tag{0}$$

Bu tanıma göre 0 bir kümedir (boşkümedir.)

0'dan sonra gelen sayıyı $\{0\}$ kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 0^+ ya da 1 adını verelim:

$$0^+ = 1 = \{0\}. \tag{1}$$

[2]Bu dört kuralla elde edilen her küme sonludur. Sonsuz kümeyi var etmek için başka bir karar almalı

1'den sonra gelen sayıyı $\{0,1\}$ kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 1^+ ya da 2 adını verelim:

(2) $$1^+ = 2 = \{0,1\}.$$

2'den sonra gelen sayıyı $\{0,1,2\}$ kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 2^+ ya da 3 adını verelim:

(3) $$2^+ = 3 = \{0,1,2\}.$$

3'ten sonra gelen sayıyı $\{0,1,2,3\}$ kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 3^+ ya da 4 adını verelim:

(4) $$3^+ = 4 = \{0,1,2,3\}.$$

Şimdi şu eşitliklere bakalım:

$$\begin{array}{lll} 4 & = 3^+ & =^4 \{0,1,2,3\} = \{0,1,2\} \cup \{3\} =^3 3 \cup \{3\} \\ 3 & = 2^+ & =^3 \{0,1,2\} = \{0,1\} \cup \{2\} =^2 2 \cup \{2\} \\ 2 & = 1^+ & =^2 \{0,1\} = \{0\} \cup \{1\} =^1 1 \cup \{1\} \\ 1 & = 0^+ & =^1 \{0\} = \emptyset \cup \{0\} =^0 0 \cup \{0\} \end{array}$$

Böylece, hem tanımladığımız bu sayıların birer küme olduklarını kanıtlarız, hem de bu sayıların,

$$n^+ = n \cup \{n\}$$

eşitliğini sağladığını görürüz. Tanımlanmış her n sayısından "bir sonraki" sayıya n^+ diyelim ve bu sayıyı,

(n) $$n^+ = n \cup \{n\}$$

olarak tanımlayalım.

Bu sayede, 4'ten sonra gelen sayıları da buluruz:

$$4^+ =^n 4 \cup \{4\} =^4 \{0,1,2,3\} \cup \{4\} = \{0,1,2,3,4\}.$$

Bu sayıyı 5 olarak göstereceğiz elbet.

Ve 5'ten sonra gelen sayı:

$$5^+ =^n 5 \cup \{5\} =^4 \{0,1,2,3,4\} \cup \{5\} = \{0,1,2,3,4,5\}.$$

Toplama

Sayıları tanımladık. Şimdi sayıları toplamasını öğrenelim. Tanımla başlıyorum. n ve m birer sayı olsunlar.

$$\begin{aligned} n + 0 &= n & (*) \\ n + m^+ &= (n+m)^+ & (**) \end{aligned}$$

Eğer tanımlar yerinde tanımlarsa, iki artı ikinin dört olması, yani $2+2 = 4$ eşitliğinin bir teorem olması gerekir... Hatta $n^+ = n+1$ eşitliğinin geçerli olması gerekir. Bunu hemen kanıtlayalım:

$$n + 1 = n + 0^+ = (n + 0)^+ = n^+.$$

İşte kanıtladık!

Teorem 2. $2 + 2 = 4$.

Kanıt: Önce $2 + 1 = 3$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$2 + 1 = 2 + 0^+ =^* (2 + 0)^+ =^{+0} 2^+ = 3.$$

Şimdi, bu eşitliği kullanarak $2+2 = 4$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

$$2 + 2 = 2 + 1^+ =^{**} (2 + 1)^+ = 3^+ = 4.$$

Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Yukarıdaki tanımlardan yola çıkarak, her n için

$$0 + n = n$$

eşitliğini de kanıtlayabiliriz. Örneğin

$$0 + 5 = 5$$

eşitliğini... Hatta hatta

$$0 + 1000 = 1000$$

eşitliğini...

Yukarıdaki (*) tanımında,

$$0 + n = n$$

denmiyor,

$$n + 0 = n$$

deniyor. Ve biz,

$$n + m = m + n$$

eşitliğini bilmediğimizden, (*) tanımından

$$0 + n = n$$

eşitliğini çıkaramıyoruz. Bu eşitlik için biraz uğraşmak gerekir.

Teorem 3. $0 + n = n$.

Kanıt: Bu eşitliği "n üzerinden tümevarımla" kanıtlayacağız; yani eşitliği önce $n = 0$ için kanıtlayacağız, daha sonra, eşitliğin n için geçerli olduğunu varsayıp, aynı eşitliğin n'den sonra gelen ilk sayı olan n^+ için de geçerli olduğunu kanıtlayacağız. Bir başka deyişle tümevarımla kanıt iki aşamada yapılır:[3]

Birinci Aşama: Önce $0 + 0 = 0$ eşitliğini kanıtla.

İkinci Aşama: Daha sonra,

$$0 + n = n$$

eşitliğini doğru kabul edip,

$$0 + n^+ = n^+$$

eşitliğini kanıtla.

Birinci aşama, (*) tanımında verilmiş zaten. İkinci aşamayı kanıtlayalım:

$$0 + n^+ =^{**} (0 + n)^+ = n^+$$

[3] Doğal sayılar kümesinin tanımını verseydik, tümevarımla kanıtın neden geçerli olduğunu da kanıtlayabilirdik. Daha doğrusu, doğal sayılar kümesi, tümevarımla kanıtın geçerli olabileceği biçimde tanımlanmıştır. Ama konuyu zorlaştırmamak için tümevarımla kanıtın neden geçerli olduğunu burada kanıtlamayacağız.

Yukarıdaki birinci eşitlik (**) tanımından, ikinci eşitlik de

$$\text{“}0 + n = n\text{”}$$

varsayımımızdan çıkıyor. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Teorem 4. $n + m = m + n$.

Kanıt: Bu teoremi de tümevarımla kanıtlayacağız. İster n üzerinden, ister m üzerinden... Biz, m üzerinden tümevarım yapalım. Yani, teoremi önce $m = 0$ için kanıtlayalım (Birinci Aşama). Arkasından, teoremin m için doğru olduğunu varsayıp, aynı teoremi m^+ için kanıtlayalım (ikinci Aşama).

Birinci Aşama: $n + 0 = 0 + n$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Birinci terim (*) tanımına göre n'ye eşit. İkinci terim de yukardaki teoreme göre n'ye eşit. Demek ki bu iki terim birbirine eşit.

İkinci Aşama: $n+m = m+n$ eşitliğini varsayıp, $n+m^+ = m^+ + n$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Başlayalım:

$$n + m^+ =^{**} (n + m)^+ = (m + n)^+ =^{**} m + n^+ = \cdots$$

Birinci eşitlik toplamanın tanımından çıkıyor. İkinci eşitlik varsayım. Üçüncü eşitlik gene toplamanın tanımından çıkıyor. Devamını getiremedik... Takıldık...

Ama daha önce $m + n^+ = m^+ + n$ eşitliğini kanıtlamış olsaydık sorun kalmazdı. Demek ki bu teoremden önce

$$m + n^+ = m^+ + n$$

eşitliğini kanıtlamamız gerekiyordu. Kanıtlayalım:

Önsav 5. $m + n^+ = m^+ + n$.

Önsavın Kanıtı: Kanıtı n üzerine tümevarımla yapacağız. Önce

$$n = 0$$

için, yani

$$m + 0^+ = m^+ + 0$$

eşitliğini kanıtlamalıyız:

$$m + 0^+ =^{**} (m+0)^+ =^* m^+ =^* m^+ + 0$$

ve önsav $n = 0$ için kanıtlanmış oldu.

Şimdi, önsavın n için geçerli olduğunu varsayıp, önsavın n^+ için geçerli olduğunu kanıtlamalıyız. Yani $m + n^+ = m^+ + n$ eşitliğini varsayıp, $m+n^{++} = m^+ + n^+$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlıyoruz:

$$m + n^{++} =^+ (m + n^+)^+ = (m^+ + n)^+ =^+ m^+ + n^+$$

İkinci eşitlik tümevarım varsayımımızdan kaynaklanmaktadır.

Böylece önsavımız kanıtlanmış oldu.

Şimdi teoremimizi, kaldığımız yere yukarıdaki önsavın eşitliğini yerleştirerek kanıtlayabiliriz:

$$n + m^+ =^{**} (n+m)^+ = (m+n)^+ =^{**} m + n^+ = m^+ + n.$$

Teorem de kanıtlanmıştır.

Çarpma

Sıra çarpmaya geldi. Çarpmayı şöyle tanımlayalım:

$$n \times 0 = 0 \qquad (\circ)$$
$$n \times m^+ = n \times m + n \qquad (\circ\circ)$$

Teorem 6. $2 \times 2 = 4$.

Kanıt: Önce $2 \times 1 = 2$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$2 \times 1 = 2 \times 0^+ =^{\circ\circ} 2 \times 0 + 2 =^{\circ} 0 + 2 = 2.$$

Burada, birinci eşitlik 1'in tanımından ileri gelmektedir. Sonuncu eşitlik de bir önceki bölümde kanıtlanmıştı.

Şimdi $2 \times 2 = 4$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

$$2 \times 2 = 2 \times 1^+ =^{\circ\circ} 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Burada, birinci eşitlik 2'nin ve çarpmanın tanımından ileri gelmektedir. Sondan bir önceki eşitlik kanıtımızın başında kanıtlanmıştır. Sonuncu eşitlik bir önceki bölümde kanıtlanmıştı.

Dileyen okur,

$$n \times m = m \times n$$
$$n + (m + p) = (n + m) + p$$
$$n \times m = m \times n$$
$$n \times (m \times p) = (n \times m) \times p\,,$$
$$n \times (m + p) = n \times m + n \times p$$

gibi bilinen eşitlikleri (tümevarımla) kanıtlayabilir.

Gerçek Nedir Ne Değildir?

Gerçek nedir, var mıdır, varsa benden bağımsız mıdır ve ona nasıl ulaşılır? Doğru nedir? “Anlamak” ne demektir? Bir şeyi nasıl anlarız ve anladığımızı nasıl anlarız? Düşünmek ne demektir? Bazı verilerden bir başka sonuç nasıl, hangi kurallara göre çıkarılır? Kanıt nedir? Bu ve benzeri soruları sürekli sormadan, verilen yanıtları sürekli sorgulamadan tam anlamıyla aydın olunamaz.

Her aydın bu soruların yanıtlarını vermelidir demiyoruz, çünkü bunlar yanıtsız sorular da olabilir, biz sadece aydının bu konularda sürekli düşünmesi ve kendi kendine tartışması gerektiğini söylüyoruz.

Aydın, kendi çıkarlarını gözardı ederek ve toplumun çıkarlarını düşünerek toplumu yönlendirmek ve değiştirmek isteyen kişidir. Bizce... Aydın bu görevini yazarak, çizerek, çalıp söyleyerek, konuşarak yerine getirir, dolayısıyla aydın topluma mesaj iletir. Eğer sorumluluk sahibiyse, ki öyle olması gerekir, aydının topluma verdiği mesaj hakkında düşünmesi gerekir. Bu da ister istemez yukarıdaki soruları sordurtur.

Ahmet'in ya da Ayşe'nin gerçeği (ya da doğrusu) değişik olabilir, Ahmet ve Ayşe olayları değişik yaşayabilirler. Gerçek, kişiden kişiye değiştiği gibi coğrafyadan coğrafyaya da değişir: Türkiye'nin gerçeğiyle ABD'nin gerçeği bir olamaz. Gerçek, kişiye ve coğrafyaya göre değiştiği gibi zamana göre de değişir: Ortaçağ'ın gerçeğiyle bugünün gerçeği bir değildir. Bunlar her-

kesin bildiği ya da bildiğini sandığı, kahvede bile duyabileceğimiz beylik sözler. Herhalde bunlardan sözedeceğimi sanmıyorsunuz!

Gerçeğin ve doğrunun kişiye, coğrafyaya ve tarihe göre değişeceğini söylerken, sözünü ettiğimiz gerçeğin ya da doğrunun ne olduğunu biliyor muyuz? Gerçek ya da doğru üzerine herhangi bir söz edebilmek için önce bu kavramların ne olduklarını bilmeliyiz. Tanımı bilinmeyen bir kavram üzerine ne söyleyebiliriz ki?

Demokrasi en iyi yönetim biçimidir tümcesini ele alalım. Bu tümce ne kadar doğrudur? Böyle bir ifadenin doğru olması için her şeyden önce "demokrasi"nin tanımlanması gerekir. Demokrasi tanımlandıktan sonra "yönetim biçimi" tanımlanmalı. Arkasından "en iyi" tamlaması tanımlanmalı. Ve tüm bu tanımlar yapıldıktan sonra "demokrasi en iyi yönetim biçimidir" tümcesi kanıtlanmalı. İşte ancak o zaman "demokrasi en iyi yönetim biçimidir" tümcesi doğru olabilir.

Yanlış anlaşılmasın, tersini söylemiyoruz, haşa, biz sadece söylediğimizin ne kadar "doğru" olduğunu tartışıyoruz.

Tabii, bir başkası, "Benim 'demokrasi', 'yönetim biçimi' ve 'en iyi' tanımlarım değişik" deyip sizin gerçek diye sunduğunuz önermeyi reddedebilir. Ama siz de buna karşı, "Bu kavramlara benim verdiğim tanımlarla önerme doğrudur" diyebilirsiniz. Eğer kanıtınız doğruysa kimse buna karşı çıkamaz.

"Demokrasi"nin tanımı ne olmalıdır tartışması başka bir tartışmadır, "doğru/gerçek nedir?" tartışmasına dahil değildir, ya da çok ucundan, çok dolaylı olarak dahildir.

Yukarıda tanımlardan ve kanıttan sözettik. Tanımlar verildikten sonra, yani tümcenin (ya da önermenin) anlamı iyice anlaşıldıktan sonra, tümcenin kanıtlanması gerektiğini söyledik. Kanıt üzerine daha çok yoğunlaşmak için anlamı bilinen bir tümceyi ele alalım: *Ankara Türkiye'nin başkentidir*. Bu tümcenin doğru olduğundan kuşkumuz yok herhalde. Ankara'nın, Türkiye'nin ve "başkent"in tanımları belli. Peki nasıl kanıtlarsınız doğru olduğunu bildiğiniz bu tümceyi? "Anayasa'da öyle yazıyor" demeniz yeterli midir? Eğer "başkent"in tanımında

böyle yazıyorsa yeterlidir elbet. Ben de size "Gösterin Anayasa'yı" derim. Diyelim Anayasa'yı buldunuz, doğru sayfayı açıp önüme koydunuz. "Nereden belli bunun gerçek Anayasa olduğu" diye sorabilirim size. O zaman birlikte Ankara'ya gideriz, TBMM tutanaklarına bakarız. Milletvekillerinin imzaları orada, hepsi Ankara'yı başkent ilan etmişler. Bu kez "Nereden belli bu imzaların sahte olmadığı?" diye sorarım size... Daha da ilginç olabilirim: Nereden belli buranın Ankara olduğu, Anayasa'nın Ankara'da olduğu, buranın meclis olduğu?..

Bana hiçbir biçimde Ankara'nın Türkiye'nin başkenti olduğunu kanıtlayamazsınız. Tüm Türkiye tek ağızdan "Ankara Türkiye'nin başkentidir" diye bağırsa, gene de ikna olmayabilirim. Yani, büyük bir olasılıkla öyledir, Ankara gerçekten Türkiye'nin başkentidir ama yüzde yüz ikna olmam.

Belki benim tuhaf bir hastalığım vardır, bu öyle bir hastalıktır ki, Türkiye'nin başkentinin Ankara olmadığını öğrendiğim anda öleceğim... Siz hepiniz bunu biliyorsunuz ama ben bilmiyorum. İsterseniz paranoya deyin, ama içime öyle bir kuşku düşüverdi birden. Öleceğimi bildiğinizden ve ölmemi istemediğinizden, bana numara yapıyorsunuz, bana oyun oynuyorsunuz. Çocukluğumdan beri kandırılmışım... Benim için özel gazeteler basılmış, özel haritalar çizilmiş... Hâlâ daha kandırıyorsunuz... Yutmam!

Elinize bir elma alın. Bu elmayı bırakırsanız ne olur? Elma düşer. Öyle mi? Nereden biliyorsunuz elmanın düşeceğini? Bırakırsınız elmayı, elma gerçekten düşer.

– İşte, dersiniz bana, elma düştü.

Gerçekten de elma düştü. Gözlerimle gördüm. Haklıymışsınız.

– Peki... Bir daha bıraksanız ne olur acaba?

– Gene düşer elbet!

– Nereden belli?

– Çünkü hep düştü!

– Biliyorum hep düştüğünü, ama bundan sonra ne olacak acaba?

– Gene düşecek...

– Nereden biliyorsunuz hep düşeceğini?

– Bugüne kadar hep düştü, bundan sonra da hep düşecek...

– Bugüne kadar elmanın hep düşmesi bundan sonra da elmanın hep düşeceği anlamına gelmez ki!

– Gelir...

– Neden?

– Çünkü aynı koşullarda tekrarlanan deneyler aynı sonuçları verir...

– Neden?

– Bu bir ilkedir, fizik ilkesi! Bunu da mı bilmiyorsun!

– Biliyorum ya da bilmiyorum... Ama siz nereden biliyorsunuz bu ilkeyi? Bu ilkeye göre ben hiç ölmeyeceğim, çünkü bugüne dek hiç ölmedim!

İşte burada çuvallarsınız. Aynı koşullarda tekrarlanan deneylerin aynı sonuçları verdiğini kanıtlayamazsınız. Dolayısıyla elmanın da hep yere düşeceğini kanıtlayamazsınız.

Bir gün bir içki masasında bu konulardan sözederken, hatta önümüzdeki şişenin var olup olmadığından bile emin olamayacağımızı söylerken, bir arkadaşım,

– Şimdi, dedi, kafana geçiririm bu şişeyi, anlarsın şişenin gerçek olup olmadığını!

Çok komik! Ben dahil hepimiz güldük. Konunun derinliğine yakışan ciddiyete geçtiğimizde şöyle yanıtladım arkadaşımı:

– Kafama bir şey geçirmişsindir ve ben sersemlemişimdir. Bundan benim kuşkum olmayabilir. Ama, bir, kafama gerçekten şişe mi geçirdin? İki, kafama gerçekten bir şişe geçirmiş olsan bile, bunu başkalarına kanıtlayabilir miyiz? Senin bu eylemini filme alıp cümle âleme göstersek bile, filmin sahte olduğunu öne sürüp inanmayanlar olabilir. Saddam'ın yakalandığına bile inanmayanlar var, sahtesinin yakalanmış olacağını öne sürüyorlar! Başkasını doğruluğuna ikna edemediğin bir önerme gerçek addedilebilir mi? Gerçek, başkasını ikna edebildiğin ölçüde gerçektir!

Bu son söylediğim gerçeğin bir tanımı olabilir mi? Eğer bunu tanım olarak kabul edersen, o zaman geriye sadece matematiksel gerçek kalır. Bu anlamda başka gerçek yoktur, olamaz.

Doğal Sayılar Ne Kadar Doğaldır?

Sayıları anlamak istiyoruz. "Sayıları anlamak" deyince, sanki bizim dışımızda bir yerde, çok belirgin ve fiziksel bir biçimde sayılar var da biz onları anlamak istiyoruz gibi bir anlam çıkabilir.

"Anlamak" üzerine düşünelim biraz. Anlamak ne demektir? Neyi, nasıl ve ne dereceye kadar anlayabiliriz? Anlama çeşitleri nelerdir? Bu tür sorularla ilgileneceğiz bu yazıda. Derin felsefe... Daha derini yok! Ya da ben bilmiyorum.

"Sayıları anlamak"la "zürafaları anlamak" arasında bir ayrım var mı? Var gibi... Zürafalar orada. Karşımdalar. Otluyorlar, geziniyorlar, koşuşuyorlar. Görüyorum onları. Zürafaların sindirim sistemini anlamaya çalışabilirim örneğin. Çünkü o sindirim sistemi orada. Benden bağımsız bir biçimde var.

Oysa sayılar ortalıkta görünmüyorlar. Ben hiç beş görmedim hayatımda, bundan sonra da görmeyeceğim. Şimdiye kadar kimse "Çok güzel bir beş geçti kapımın önünden" dememiştir, çünkü beş geçmez, beş yürümez, beş kırılmaz, beş uçmaz, beş susamaz, acıkmaz, yaşlanmaz, ölmez... Beş hiçbir şey yapmaz! Oysa zürafa bir şeyler yapar...

Zürafa orada. Bu çok belli. Oysa beş'in ne kadar orada olduğu pek belli değil.

Zürafayı alır karşıma incelerim, ama ya beş'i?

Her ne kadar "beş zürafa" bir anlam ifade ediyorsa da, tek başına "beş"in ne anlama geldiği o kadar belli değil.

"Beş zürafa" bir anlam ifade ediyor mu dedim? Yanıldım

galiba... "Bir zürafa"nın anlamı ve hatta fiziksel varlığı bile tartışılabilir, çünkü o "bir zürafa" durmadan değişmektedir. O durmadan değişen zürafaya sanki hiç değişmezmiş, sanki sabit bir varlıkmış gibi "zürafa" denmesi tam gerçeği yansıtmaz. Her zürafa bir diğerinden değişiktir ve her zürafa her an değişir. "Bir zürafa" değil, durmadan değişen zürafalar vardır! Hatta daha doğmamış zürafalar bile vardır! Dolayısıyla aslında "zürafa" da bir kavramdır. "Zürafa", "zürafa" adını verdiğimiz durmadan değişen varlıkların ortak adıdır. "Zürafa" sanıldığından daha soyut bir şeydir.

Peki zürafa bir kavramsa, "beş zürafa" ne demektir? Aynı kavramdan beş tane olur mu? Galiba "beş zürafa", "zürafa kavramının kapsamına giren varlıkların beşi" anlamına geliyor... O varlıklar da durmadan değiştiklerinden tümüyle kavrayamayacağımız, bütünüyle algılayamayacağımız şeyler. Birini bile kavrayamazken biz beşinden sözediyoruz...

Hayvan zürafa ölür, kavram zürafa ölmez. Hayvan zürafa durmadan değişir, kavram zürafa hiç değişmez. Hayvan zürafayla kavram zürafayı birbirine karıştırmamak lazım. Kavram zürafa beş'e çok daha yakın.

Konu gittikçe karmaşıklaşıyor ve içinden çıkılmaz bir hal alıyor.

Neyse ne!.. Sonuç olarak zürafa ne de olsa zürafadır. Oradadır. Yadsınamaz bir biçimde, ya da çok zor yadsınır bir biçimde... Oysa sayılar bir zürafa kadar bile orada değiller.

Sayıları göremiyoruz diye sayılar yok diyebilir miyiz? Belli ki sayılar var. Bakın, sözünü ediyorum şimdi ve anlaşıyoruz. Sayılar, hiçbir yerde olmasalar beynimizde varlar. Zihinsel bile olsalar varlar. Zürafalarla aynı düzlemde değil belki ama "beş" de var. Descartes yazsaydı bu satırları, "Beş'i düşünüyorum demek ki beş var." derdi. Haklı olarak...

Çoğu insanın bir elinde beş parmak vardır. Bunu herkes bilir. Demek ki hepimizin uzlaştığı bir beş kavramı var. İçinde "beş" geçen bu önermeyi hepimiz anlıyoruz ve doğru buluyoruz. Demek ki "beş"e ortak bir anlam verebiliyoruz. Tüm insanların beş'e ortak bir anlam vermeleri, herhalde ancak beş'in bizden

bağımsız bir biçimde var olmasıyla olabilir.

Kaldı ki, beş kavramı birbiriyle hiç ilişkisi olmamış uygarlıklar tarafından birbirinden bağımsız olarak da bulunmuştur. Demek ki bizim dışımızda bir yerde var bu "beş"... Öyle olmalı... Var ki biraz düşünebilen her uygarlık belli bir seviyeye gelince beş'i kavrıyor ve kavram olarak benimsiyor.

Akıllı uzaylılar varsa, onlar da beş kavramını bir süre sonra yaratırlar/bulurlar. Mutlaka... Öyle sanıyorum. Beş kavramı sadece dünyamıza özgü değil. Tüm modelde, doğada, her yerde olan bir kavram.

Galiba "beş" salt zihinsel değil... O da orada bir yerde. Tam nerede bilmiyorum ama oralarda bir yerlerde bir "beş" olmalı. Görmesek de, dokunmasak da o beş bizim beşimizdir. Beş'in kendisi olmasa ("beş'in kendisi" ne demekse!) bile beş kavramı benim dışımda bir yerde var. Sadece düşünce olarak var -başka türlü var olamaz- ama var... (Benden bağımsız düşünce olabilir mi doğada? Felsefi soruların şahı!) Var ki hepimiz anlaşıyoruz beş konusunda.

Belki de doğa bana "beş beş beş" diye fısıldıyor ve ben beynimi kullanarak o beş kavramını yaratıyorum/buluyorum.

Sayıları anlamak gibi son derece masum bir uğraş bizi varlık ve yokluk gibi çok derin felsefi sorulara götürdü...

Sorularıma tam yanıt veremedim. Birtakım çıkarımlarda bulunup sayıların orada bir yerde oldukları sonucunu çıkardım ama bu çıkarımlarımdan ben de pek emin değilim, yüzde yüz ikna olmadım, ben ikna olsam da sizi ikna edemiyor olabilirim. Matematik dünyasından çok çıktık...

Yanıtını bulamadığımız sorularla zaman harcamayıp devam edelim...

Doğada var ya da yok, beş'i anlamak istiyorum. Beş'i anlamak için önce beş'in ne olduğunu bilmeliyim. Yani beş'i tanımlamalıyım.

Bir deneme yapalım: Beş'i bir elin parmak sayısı olarak tanımlayalım.

Biraz demagoji yapıp bu tanıma karşı çıkabilirim ama çıkmayacağım. Bir an için bu tanımı kabul edip beş'i anlamaya

çalışalım...

Beş'i tanımladıktan sonra beş'i anlamak ne demektir sorusu geliyor akla. Beş'in nesini anlayacağım? Beş'i tek başına değil, beş'in öbür sayılarla olan ilişkisini anlamak istiyorum. Örneğin $5 + 3$'ü bulmak istiyorum. "Üç parmak"ı da tanımladığımızı varsayarak, $5 + 3$ sayısını beş parmağın yanına öbür elin üç parmağı daha geldiğinde elde edilen parmak sayısı olarak tanımlayabiliriz.

Nitekim beş parmağınızın yanına öbür elinizin üç parmağını getirseniz sekiz parmak elde edersiniz. Deneyin göreceksiniz. Tekrar tekrar deneyin, hep aynı sonucu, "sekiz parmak" sonucunu alacaksınız. Ancak bir sorun var burada. Deneyerek gördüğünüzü kanıtlayamazsınız. Beş elmayla üç elmayı yanyana koyduğunuzda sekiz elma elde edeceğinizi hiçbir zaman kanıtlayamazsınız. Çünkü önermeniz deneye bağlı. O deneyin sonsuza kadar aynı sonucu vereceğini kanıtlayamazsınız. Dikkatinizi çekerim: Beş elmayla üç elmayı yanyana koyarsanız sekiz elma elde etmezsiniz demiyorum, sadece bu önermenizi kanıtlayamazsınız diyorum. Fiziksel deneyler matematiksel anlamda kanıtlanamazlar. "Beş elmanın yanına üç elma daha koyarsam sekiz elma elde ederim" önermesi olsa olsa (yapılmış) her bir deney için kanıtlanır, tüm genelliğiyle, gelecekte yapılacak deneyler için kanıtlanamaz. "Böyle gelmiş böyle gider" geçerli bir kanıt yöntemi değildir. En azından matematikte...

Oysa matematik kanıtlar. $5 + 3 = 8$ eşitliğini kanıtlamalıyız... Kanıtlamadan olmaz.

Ayrıca "beş"i bir eldeki parmak sayısı olarak tanımlasam, çok çok büyük sayıları nasıl tanımlayacağım? Hatta genel olarak "sayı" kavramının kendisini nasıl tanımlayacağım? Bir, iki, üç, dört, beş tanımlandı. Altıyı da tanımladık, yediyi de... Günün birinde durmam gerekecek, sonsuza kadar sayı tanımlayacak değilim ya... Sayıları teker teker tanımlamakla sayı kavramını tanımlamak arasında da bir ayrım vardır.

Ne yapacağız?

Önce şunu yapacağız: Günlük dilde kullandığımız ve aslında ne demek olduğunu bilmediğimiz beş'le daha sonraki yazılarda

matematiksel bir nesne olarak tanımlayacağımız beş'i birbirinden ayıracağız. Matematiksel beş'in sizin elinizin parmak sayısıyla hiçbir ilgisi olmayacak, ya da çok az ilgisi olacak.

Yepyeni bir beş kavramı tanımlayacağız. Matematiksel olarak...

Nasıl yapacağız bunu?

Nasıl yapacağımız hiç önemli değil! Beş'i nasıl tanımladığımızın hiç mi hiç önemi olmayacak. Beş'i, üç'ü, sekiz'i ve toplamayı öyle tanımlayacağız ki, örneği, $5 + 3 = 8$ eşitliği doğru olacak. Önemli olan, sayıları ve işlemleri nasıl tanımladığımız değil, tanımladığımız sayı ve işlemlerin istediğimiz özellikleri sağlamaları... İşte bu, matematiği matematik yapan niteliklerin en önemlilerinden biridir. Daha doğrusu modern matematiği modern matematik yapan budur. Matematikte kavramların nasıl tanımlandıkları değil, kavramların hangi özellikleri sağladıkları önemlidir.

Matematiğin bu bakış açısı sadece sayılar için değil, matematiksel her kavram için geçerlidir. Noktaların, doğruların, düzlemlerin nasıl tanımlandıkları önemli değildir, nasıl tanımlanırlarsa tanımlansınlar, önemli olan bu kavramların istediğimiz özellikleri sağlamasıdır.

Doğal Sayılardan Ne İstiyoruz?

Doğal sayıları, yani $0, 1, 2, 3, \ldots$ gibi sayıları anlamak istiyoruz. Elbette doğal sayıları anlamak için önce doğal sayıların matematiksel tanımını vermeliyiz. Ama matematiksel tanımı vermeden önce de doğal sayıların nesini anlamak istediğimizi bilmeliyiz. Çünkü tanımı ona göre yapacağız.

Herhalde, en azından bir doğal sayıdan sonra hangi doğal sayının geleceğini (verilen doğal sayının **ardılı**nı) bilmek istiyoruz, yani x verilmişse $x+1$ sayısını bulabilmek ve $x \mapsto x+1$ fonksiyonunun özelliklerini bilmek istiyoruz. Sonra, sanırım doğal sayıları toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz. Toplamayı ve çarpmayı anlamadan olmaz. Ta ilkokuldan beri başımızın eti yendi toplama ve çarpma için... Örneğin,

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

eşitliğini kanıtlayabilmek istiyoruz. Hatta belki 5^3 gibi bir sayının üssünü almayı da becerebilmeliyiz. Ayrıca hangi sayının küçük, hangi sayının büyük olduğunu da anlamalıyız, örneğin $x^2 \geq x$ eşitsizliğini kanıtlayabilmeliyiz.

Anlamak istediklerimizi sıralayalım: $x + 1$ işlemi, toplama, çarpma, üs alma işlemleri ve eşitsizlik ilişkisi. Başka varsa söyleyin.

Eşitsizlikten başlayalım. Doğal sayılardaki $x \leq y$ eşitsizliğini toplama cinsinden yazabiliriz:

$x \leq y$ eşitsizliği sadece ve sadece $x+z = y$ eşitliğini sağlayan bir z doğal sayısı varsa doğrudur.

Görüldüğü gibi eşitsizliği toplamadan bedava elde ettik. Dolayısıyla, eğer toplamayı anlarsak eşitsizliği de anlarız. Böylece anlamak istediklerimizin listesinden eşitsizliği silebiliriz. Artık sadece $x+1$ işlemini, toplamayı, çarpmayı ve üs almayı anlamak istiyoruz.

Şimdi üs almaya bakalım.

$$x^0 = 1$$

ve

$$x^{y+1} = x^y \times x$$

eşitliklerinden, çarpmayı ve $x+1$ işlemini biliyorsak güç almayı da bildiğimizi anlarız. Nitekim bu eşitliklerden örneğin şu çıkar:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2^{2+1} = 2^2 \times 2 = 2^{1+1} \times 2 \\ &= (2^1 \times 2) \times 2 = (2^{0+1} \times 2) \times 2 \\ &= ((2^0 \times 2) \times 2) \times 2 = ((1 \times 2) \times 2) \times 2. \end{aligned}$$

Çarpmayı biliyorsak, sağ taraftaki çarpmayı hesaplayabiliriz ve 2^3 işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki anlamak istediklerimizin listesinden üs almayı da silebiliriz. Artık sadece $x+1$ işlemini, toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz.

Sıra geldi çarpmaya... Çarpmayı da toplama cinsinden yazabiliriz:

$$x \times 0 = 0$$

ve

$$x \times (y+1) = x \times y + x.$$

Nitekim, yukarıdaki eşitlikleri kullanarak ve toplamayı ve $x+1$ işlemini bildiğimizi varsayarak, örneğin 2×3 işleminin sonucunu bulabiliriz:

$$\begin{aligned} 2 \times 3 &= 2 \times (2+1) = 2 \times 2 + 2 = 2 \times (1+1) + 2 \\ &= (2 \times 1 + 2) + 2 = (2 \times (0+1) + 2) + 2 \\ &= ((2 \times 0 + 2) + 2) + 2 = ((0+2) + 2) + 2. \end{aligned}$$

Toplamayı biliyorsak, en sağdaki işlemi hesaplayıp 2×3 işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki çarpmayı da bilmek istediklerimizin listesinden silebiliriz. Artık sadece $x+1$ işlemini ve toplamayı anlamak istiyoruz.

Şimdi de toplamaya bakalım. Eğer $x + 1$ işlemini yapabiliyorsak, toplamayı da yapabiliriz. Nitekim

$$x + 0 = x \text{ ve } x + (y + 1) = (x + y) + 1$$

eşitlikleri toplama yapmamızı sağlar. Örneğin,

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= 2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1 \\ &= (2 + (1 + 1)) + 1 \\ &= ((2 + 1) + 1) + 1. \end{aligned}$$

Eğer x verildiğinde $x + 1$ işlemini yapabiliyorsak, o zaman sağdaki işlemi yapıp $2 + 3$ işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki toplamayı da bilmek istediklerim listesinden silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini anlamak istiyoruz.

Geriye fazla bir şey kalmadı. Toplamayı, çarpmayı, üs almayı, eşitsizliği anlamak için $x + 1$ işlemini anlamalıyız. $x + 1$ işleminin özellikleri bize toplamanın, çarpmanın, üs almanın, eşitsizliğin tüm özelliklerini verecek.

Toplamanın, çarpmanın, üs almanın ve eşitsizliğin özelliklerini kanıtlayabilmek için $x + 1$ işleminin hangi özelliklerini bilmeliyim? İşte önemli soru bu. Ancak bu soruyu yanıtladıktan sonra tanımlara geçebiliriz. $x \mapsto x + 1$ işleminin hangi özelliklerine ihtiyacımız olduğunu bir sonraki yazıda söyleyeceğiz.

Bir nokta okurun dikkatinden kaçmış olabilir: $x+1$ işlemini anlamak için 1 diye bir sayıyı anlamak gerekmiyor. Biz sadece "artı bir" işleminden sözediyoruz, 1 sayısından sözetmiyoruz. Hatta "artı bir" değil "artıbir" işleminden sözediyoruz. Bundan sonra $x+1$ yerine $S(x)$ yazalım ve "artı bir" yerine "bir sayının ardılı" terimini kullanalım. Böylece kafa karıştıran 1'den kurtulmuş oluruz.

Peano Aksiyomları

Bir önceki yazıda, doğal sayılarda toplamayı, çarpmayı, üs almayı ve eşitsizliği anlayabilmek için, doğal sayılar kümesi üzerinde

$$x \mapsto x + 1$$

formülüyle tanımlanan "artı bir" ya da "ardılı" işlemini anlamamızın yeterli olduğunu gördük. Bu dediğimiz tam doğru değil, yanlış, ama çok da yanlış değil. Ama şimdilik doğruymuş gibi devam edelim. Önümüze çıkan sorunlardan daha sonra sözedeceğiz.

Bu yazıda ilk olarak şu soruyu sorup yanıtlayacağız: "Ardılı" işleminin nesini bilmeliyiz ki doğal sayılarla ilgili anlamak istediğimiz "her şeyi" anlayalım[1]? Bu soruyu ilk Giuseppe Peano adlı İtalyan matematikçi sormuş ve yanıtlamıştır. Peano Aksiyomları adı verilen bu özellikleri bu yazıda açıklayacağız.

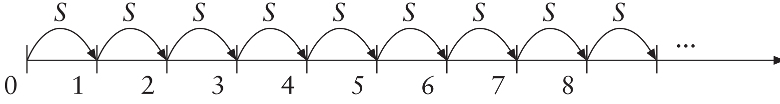
Bundan böyle $x+1$ yerine $S(x)$ yazalım[2], ki $x+1$ işleminin 1'le ilgili bir işlem olduğu gibi aslında pek de yanlış olmayan ama bizi yanlış yönlendirebilecek bir fikre kapılmayalım. $S(x)$'e x'in ***ardılı*** adını vereceğiz.

Aşağıda, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin ne olduğunu bildiğimizi varsayıp, S fonksiyonunun en temel özelliklerini bulacağız. $\mathbb{N}$ kümesinin tanımını yazının en sonunda yapacağız.

[1] Gödel her şeyi kanıtlayamayacağımızı 1931'de kanıtlamıştır (bkz. sayfa 97 ve 107). Demek ki istediğimiz gerçekleşmesi mümkün olmayan bir istek.

[2] Buradaki S, "sonraki" anlamına gelen İngilizce "successor" ve Fransızca "successeur" sözcüklerinin baş harfidir, Türkçe "sonraki" sözcüğünün baş harfi olarak da algılanabilir.

İlk Özellikler. Her şeyden önce S, doğal sayılar kümesinden gene doğal sayılar kümesine giden bir fonksiyondur[3].



Ayrıca, S birebir bir fonksiyondur, yani eğer x ve y doğal sayıları için $S(x) = S(y)$ eşitliği geçerliyse $x = y$ eşitliği de geçerlidir[4]. Bir başka deyişle ardılları eşit olan sayılar eşittir.

Peki S fonksiyonu örten[5] midir, yani her doğal sayı, bir doğal sayının ardılı mıdır? Hayır değildir. 0 sayısı hiçbir doğal sayının ardılı değildir. Ama 0 dışındaki her doğal sayı bir başka doğal sayının ardılıdır. Yani S fonksiyonu neredeyse örten... Matematiksel deyişle S fonksiyonu $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ kümesine giden birebir ve örten bir fonksiyondur.

İkinci Özellik. S fonksiyonunun bir başka önemli özelliği daha var. O da şu: A, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin bir altkümesi olsun. Eğer 0, A'nın bir elemanıysa ve A'daki her x sayısı için x'in ardılı olan $S(x)$ sayısı da A'daysa o zaman $A = \mathbb{N}$ olur. Bir başka deyişle, $\mathbb{N}$'nin, 0'ı içeren ve içerdiği her sayının ardılını da içeren her altkümesi $\mathbb{N}$'ye eşittir. Matematiksel olarak bu dediğimiz şöyle ifade edilir.

S1. $0 \in A$, ve
S2. Her $x \in A$ için, $S(x) \in A$

koşulları sağlanıyorsa o zaman $A = \mathbb{N}$ olur. Nitekim, bu iki koşulu sağlayan bir A kümesi alalım. 0'ın A'da olduğunu birinci koşuldan dolayı biliyoruz. İkinci koşulda x yerine 0 alırsak, $0 \in A$ olduğundan, 0'ın ardılı olan $S(0)$ sayısının, yani 1'in de A'da

---

[3] Daha doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımlamadık. Şimdilik, $\mathbb{N}$ diye bir kümemiz olduğunu varsayıp sezgisel takılıyoruz. Yani düşünüyoruz. Yazının sonunda $\mathbb{N}$'nin ne olması gerektiğini göreceğiz. $\mathbb{N}$'nin ne olması gerektiğini gördükten sonra $\mathbb{N}$'nin varlığını kanıtlamalıyız.

[4] Eğer $x + 1 = y + 1$ ise $x = y$ eşitliği de doğrudur, bunu herkes bilir!

[5] $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $y \in Y$ için $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa, f fonksiyonuna örten denir.

olduğunu anlarız. İkinci önermede bu kez x yerine 1 alalım; demek ki 1'in ardılı $S(1)$, yani 2 de A'da. Şimdi, ikinci koşulda x yerine 2 alalım, böylece 3'ün de A'da olduğunu görürüz. Bunu böyle sürdürürsek her doğal sayının $\mathbb{N}$'de olduğunu anlarız.

Yukarıda verdiğimiz bir kanıt değildir, sadece okuru ikna etmeye yönelik bir akıl yürütmedir. A'nın $\mathbb{N}$'ye eşit olduğunun kanıtını veremeyiz çünkü $\mathbb{N}$ kümesini matematiksel olarak henüz tanımlamadık. Matematiksel olarak terimleri tanımlanmamış $A = \mathbb{N}$ önermesini de elbette matematiksel olarak kanıtlayamayız.

Şimdi doğal sayılar kümesinin genel kabul gören tanımını vereceğiz. Ama önce birçok kitapta tekrarlanan yanlış tanımı verelim.

Doğal sayılar kümesi sadece bir küme değildir... Tanımda $\mathbb{N}$ adı verilen bir küme vardır, ama ayrıca 0 adı verilen bir öğe ve S adı verilen bir fonksiyon da vardır. Yani aslında "doğal sayılar kümesi" $\mathbb{N}$ değil, $(\mathbb{N}, 0, S)$ ***doğal sayılar yapısı*** tanımlanır.

Doğal sayılar yapısı, hemen aşağıda açıklayacağımız özellikleri sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsüdür. Buradaki $\mathbb{N}$ bir kümedir. 0, $\mathbb{N}$'nin bir öğesidir. S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyondur. Bu küme-eleman-fonksiyon üçlüsü ***Peano aksiyomları*** adı verilen şu iki özelliği sağlamalıdır:

P1. S, $\mathbb{N}$'*den* $\mathbb{N}$'*ye giden birebir bir fonksiyondur ve* $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *eşitliği geçerlidir.*

P2. A, *doğal sayılar kümesi* $\mathbb{N}$'*nin,*

S1. $0 \in A$, ve
S2. $x \in A$ ise $S(x) \in A$

koşullarını sağlayan bir altkümesiyse o zaman $A = \mathbb{N}$ *olur.*

Birçok kitapta, doğal sayılar yapısı yukarıdaki P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsü olarak tanımlanır. Yazarlar bu yapıdan hareketle toplamayı ve çarpmayı aşağıdaki özellik sağlanacak biçimde tanımlarlar:

T1. $x + 0 = x$,
T2. $x + S(y) = S(x + y)$

ve

Ç1. $x \times 0 = 0,$
Ç4. $x \times S(y) = x \times y + x.$

T1 ve T2'nin toplamayı, Ç1 ve Ç2'nin de çarpmayı tanımladığı söylenir. Örneğin, 1 elemanını $S(0)$ olarak tanımlarsak,

$$x + 1 = x + S(0) = S(x + 0) = S(x)$$

olur, tam istediğimiz gibi. Eğer 2 sayısını da $S(1)$ olarak tanımlarsak $x + 2$ sayısının $S(S(x))$ sayısına eşit olduğunu yukarıdaki yöntemle kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Eğer 3'ü $S(2)$ olarak tanımlarsak $x + 3$ sayısının $S(S(S(x)))$ sayısına eşit olduğu da kolaylıkla kanıtlanabilir. Ancak T1 ve T2 formüllerinin **her** x ve y sayısı için $x + y$ diye bir sayı tanımladığı kanıtlanamaz. Çünkü T2, **eğer** $x + a$ sayısı **tanımlanmışsa**, $x + S(a)$ diye bir sayının tanımlandığını söylüyor; tabii bir de $x + 0$ sayısının x'e eşit olduğunu söylüyor. Demek ki, eğer $y \neq 0$ ise, $x + y$ diye bir sayının varlığını kanıtlamak için önce $S(y_1) = y$ eşitliğini sağlayan bir y_1 sayısının varlığını kanıtlayıp, $x + y_1$ toplamının olduğunu göstermeliyiz ve ancak bu y_1 sayısı bulunduktan sonra $x + y = S(x + y_1)$ eşitliğini yapabiliriz ve $x + y$ toplamını bulabiliriz. (y_1 sayısı y'den bir önceki sayıdır.) Eğer $y_1 \neq 0$ ise, yani $y \neq 1$ ise $x + y_1$ toplamının olduğunu kanıtlamak için de önce $S(y_2) = y_1$ eşitliğini sağlayan bir y_2 sayısının varlığını kanıtlayıp, $x + y_2$ toplamının olduğunu göstermeliyiz. Sonra y_3, sonra y_4... Bunu böylece devam ettirmek ve en sonunda 0'a ulaştığımızı göstermek gerekir ki bunu göstermek mümkün değildir. Eğer $y = S(S(S(S(0))))$ ise,

$$\begin{aligned} y_1 &= S(S(S(0))) \\ y_2 &= S(S(0)) \\ y_3 &= S(0) \\ y_4 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve mutlu sona (0'a yani!) dört adımda ulaşırız. Ama her y sayısı için bunu yapabileceğimiz ne malum? Nitekim her y sayısı için bunu yapabileceğimizi kanıtlayamayız, kanıtlayamayacağımız gibi, kanıtlamak istediğimiz "her y sayısının bir

öncesini alarak sonlu adımda 0'a ulaşırız" önermesini 0 ve S ve matematiksel ve mantıksal simgeler kullanarak yazamayız bile! Bırakın olguyu kanıtlamayı, olguyu dile getirmekten bile aciziz.

Yani toplama işlemi yukarıda tanımlanan $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısında tanımlanamaz.

Toplama tanımlandıktan sonra benzer sorun çarpma için de yaşanır. Yani nasıl toplama işlemi yukarıda tanımlanan $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısında tanımlanamazsa çarpma işlemi de $(\mathbb{N}, 0, S, +)$ yapısında tanımlanamaz.

Şimdi gerçek Peano aksiyomlarını verelim.

Doğal sayılar yapısı, hemen aşağıda açıklayacağımız özellikleri sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ beşlisidir. Buradaki $\mathbb{N}$ bir kümedir. 0, $\mathbb{N}$'nin bir öğesidir. S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyondur ve son olarak $+$ ve $\times$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden iki fonksiyondur. Bu beşli ***Peano aksiyomları*** adı verilen şu dört özelliği sağlamalıdır:

P1. *S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden birebir bir fonksiyondur ve $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eşitliği geçerlidir.*

P2. *A, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin,*

S1. $0 \in A$, *ve*
S2. $x \in A$ *ise* $S(x) \in A$

koşullarını sağlayan bir altkümesiyse o zaman $A = \mathbb{N}$ olur.

P3. *Her $x, y \in \mathbb{N}$ için*

T1. $x + 0 = x$,
T2. $x + S(y) = S(x + y)$

olur.

P4. *Her $x, y \in \mathbb{N}$ için*

Ç1. $x\,0 = 0$,
Ç4. $x \times S(y) = x \times y + x$.

olur.

Bu aksiyomlarda bir düzeltme daha yapmak lazım. Dikkat ederseniz P1, P3 ve P4 elemanlardan sözederken, P2 altkümelerden bahsediyor. Burada açıklayamayacağım bazı nedenlerden bu pek hoş karşılanmaz. Mümkünse aksiyomların altkümelerden değil, elemanlardan sözetmesi istenir.

P2'yi şöyle değiştirelim: $\varphi(x)$, içinde x değişkeni olan, 0, S, $+$, $\times$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\exists$, $\forall$ simgeleri, parantezler ve y, z gibi değişkenler kullanılarak yazılmış herhangi bir matematiksel önerme olsun. P2_φ şu önerme olsun:

P2$_\varphi$. *Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her x için $\varphi(x)$ doğru olduğunda $\varphi(S(x))$ de doğruysa, o zaman her x için $\varphi(x)$ doğrudur.*

Eğer P2 doğruysa, P2'deki A kümesi yerine

$$\{x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \text{ doğru}\}$$

alınarak, **P2**$_\varphi$ önermesinin doğru olduğu anlaşılır. Demek ki P2 doğruysa her φ için P2_φ önermesinin de doğru olduğu anlaşılır. Ama her φ için P2_φ önermesi doğruysa, P2 önermesinin doğruluğu kanıtlanamaz, çünkü $\mathbb{N}$'nin her A altkümesi bir formül tarafından tanımlanamaz, yani her A altkümesi için,

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \text{ doğru}\}$$

eşitliğini sağlayan bir φ formülü yoktur. (Çünkü altküme sayısı sayılamaz sonsuzlukta, formül sayısı sayılabilir sonsuzluktadır.) Demek ki P2_φ önermeler topluluğu P2 önermesinden daha zayıftır, P2'nin tüm gücünü yansıtmaya yetmez.

Artık gerçek Peano aksiyomlarını yazabiliriz:

P1. S, $\mathbb{N}$'*den* $\mathbb{N}$'*ye giden birebir bir fonksiyondur ve* $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *eşitliği geçerlidir.*

P2. *Yukarıda açıklanan dilde yazılan her φ önermesi için, eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her x için $\varphi(x)$ doğru olduğunda $\varphi(S(x))$ de doğruysa, o zaman her x için $\varphi(x)$ doğrudur.*

P3. *Her $x, y \in \mathbb{N}$ için*

T1. $x + 0 = x$,
T2. $x + S(y) = S(x + y)$

olur.

P4. *Her* $x, y \in \mathbb{N}$ *için*

Ç1. $x \times 0 = 0,$
Ç4. $x \times S(y) = x \times y + x.$

olur.

Bu özellikler doğal sayıların tüm önemli aritmetiksel özelliklerini kanıtlamak için yeterlidir diye tahmin ediliyor. Kanıtlanabilecek her şeyin kanıtlanabileceği doğru değil ama; kümeler kuramının yardımıyla kanıtlanan ancak yukarıdaki aksiyomlarla kanıtlanamayan önermelerin varlığı biliniyor, hatta bu önermelerden birkaçı açık açık biliniyor, ama gene de sayılar kuramıyla ilgili klasik tüm soruları yanıtlamak için yukarıdaki aksiyomların yeterli oldukları sanılıyor.

Yukardaki özellikleri sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısında faktoriyel ve üs alma gibi işlemler tanımlanabilir ve bu işlemler tahmin edilen özellikleri sağlarlar. Ayrıca böyle bir yapıda bir eşitsizlik de tanımlayabiliriz. , Çok önemli bir soru şimdi: Matematikte yukarıdaki P1, P2, P3 ve P4 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ beşlisi var mıdır?

Eğer matematiğin doğayı anlamaya çalıştığı ve bunda oldukça başarılı olduğu göz önüne alınırsa, yanıtın olumlu olması gerekir. Nitekim vardır. İstenirse (ama ancak istenirse) bulunur. Bunu da bir başka kitabımızda yapacağız.

Not: Önemli bir noktaya parmak basmak gerekiyor. Doğal sayılar kümesi, matematiksel olarak sadece ve sadece P1, P2, P3 ve P4 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ beşlisidir; doğal sayıların matematiksel olarak nasıl tanımlandıkları hiç ama hiç önemli değildir. Önemli olan doğal sayıların ne oldukları değil, nasıl tanımlanırlarsa tanımlansınlar, tanımlanan doğal sayıların, toplamanın ve çarpmanın tahmin ettiğimiz özellikleri sağlamalarıdır.

Matematikte önemli olan nesneler değil, nesnelerin özellikleridir. Matematiksel nesnelerin nasıl tanımlandıkları o kadar önemli değildir. Önemli olan, tanımların istenilen özellikleri sağlamasıdır.

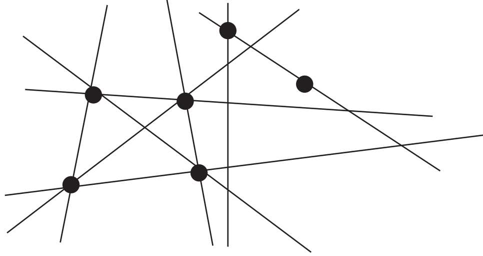
Örneğin *Develerle Eşekler* yazısında 2'yi $\{0, 1\}$ kümesi olarak, 4'ü ise $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesi olarak tanımlamıştık. Ayrıca toplamayı ve çarpmayı da tanımlamıştık. Sonra da $2 + 2 = 4$ ve $2 \times 2 = 4$ eşitliklerini kanıtlamıştık. O yazıdaki tanımların oldukları gibi olması pek önemli değildir. Önemli olan, kabul edilen tanımlarla $2 + 2 = 4$ ve $2 \times 2 = 4$ gibi eşitliklerin kanıtlanabilmesidir. Yani 2'nin, 4'ün, toplamanın ve çarpmanın ne oldukları, nasıl tanımlandıkları matematiksel açıdan önemsizdir. Önemli olan $2 + 2 = 4$ ve $2 \times 2 = 4$ gibi eşitliklerin doğruluğudur. Bütün bu eşitliklerin özünde de Peano Aksiyomları yatar. Demek ki matematikte amaç, doğal sayıların "gerçekte" ne olduklarını keşfetmek değil, Peano Aksiyomları'nı sağlayan bir sistem yaratmaktır.

Bir de tabii yaratılan sistemin olabildiğince yalın olması istenir ki, hem estetik açıdan tatmin olalım hem de $2 + 2 = 4$ gibi basit bir eşitliği kanıtlamak için bin dereden su getirmek zorunda kalmayalım.

Seçim Aksiyomu

Aşağıda yedi matematiksel olgu bulacaksınız. Bu olguların herbiri bir teoremdir, kanıtlanmışlardır. Ancak bu olgular, matematikte çok özel bir yeri olan Seçim aksiyomu kullanılarak kanıtlanmıştır. Seçim Aksiyomu'ndan bir sonraki yazıda sözedeceğiz.

Birinci Soru: Bildiğimiz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Öklid düzleminin öyle bir altkümesini bulun ki, düzlemin her doğrusunun üstünde bu altkümeden tam iki tane nokta olsun (ne fazla ne eksik...)



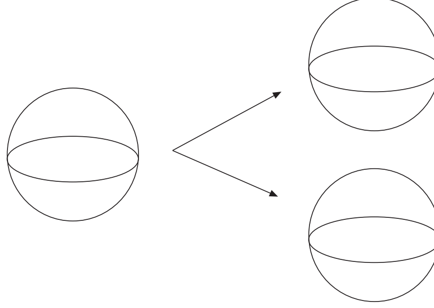
Yani, öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}^2$ bulacaksınız ki, eğer $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ bir doğruysa, $\ell \cap X$ kümesinde tam iki nokta olacak.

Arayın. Çok arayın. İstediğiniz kadar arayın. Eğer matematikçi değilseniz, bazı özel bilgilere sahip değilseniz bulamayacaksınız.

İkinci Soru: Bu soruyu okuduğunuzda, soruyu doğru anlamadığınızı sanacağınıza dair iddiaya girebilirim.

Yarıçapı 1 olan bir küre alın. Bu küreyi, öyle sonlu sayıda parçaya ayırın ki, o sonlu parçaları gene yarıçapı 1 olan iki

küre elde edecek biçimde birleştirebilin... Hem de parçaları eğip bükmeden, çekip çekiştirmeden... Sadece parçaları havada döndürerek ve öteleyerek...



Matematikte buna ***Banach-Tarski paradoksu*** adı verilir.

Normal bir topla bu yapılamaz elbet, yapılabilseydi, sermaye olarak tek bir topla bir top fabrikası kurulabilirdi...

Eğer Seçim aksiyomunu kabul ederseniz yukarıdaki sihirbazlık teorik olarak yapılabilir (ama pratikte yapılamaz).

Üçüncü Soru:

a. 0, 1, 2, 3, gibi sayılara ***doğal sayı*** denir. Boş olmayan her doğal sayı kümesinden bir eleman (eşantiyon) seçebiliriz; örneğin kümenin en küçük elemanını eşantiyon olarak seçebiliriz... Sözgelimi, bu yöntemle, $\{1, 5, 8\}$ kümesinden 1'i, çift sayılar kümesinden 0'ı, asal sayılar kümesinden 2'yi seçeriz.

b. -2, -1, 0, 1, 2, 3 gibi sayılara tamsayı denir. Boş olmayan her tamsayı kümesinden de belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. Örneğin şu yöntemi deneyelim: Tamsayı kümemize X diyelim; eğer X'in en büyük elemanı varsa o en büyük elemanı, yoksa $X \cap \mathbb{N}$ kümesinin en küçük elemanını seçelim. (Burada $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesini simgeliyor.) Böylece her tamsayı kümesinden bir eleman seçmiş olduk.

c. $2/3$, $-3/4$, $6/2$ (yani 3), $0/7$ (yani 0) gibi sayılara ***kesirli sayılar*** denir. Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ simgesiyle gösterilir:

$$\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0\}.$$

Pozitif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ olarak gösterilir:

$$\mathbb{Q}^{\geq 0} = \{a/b : a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0\}.$$

Boş olmayan bir pozitif kesirli sayılar kümesinden bir sayı nasıl seçeriz? Kümeye X diyelim. Şu kümeyi tanımlayalım:

$$A(X) = \{a + b : a/b \in X\}$$

$A(X)$ boş olmayan bir doğal sayı kümesi olduğundan en küçük elemanı vardır. Bu elemana n diyelim. Şimdi,

$$\{a/b \in X : a + b = n\}$$

kümesine bakalım. Bu, sonlu bir kesirli sayılar kümesidir, dolayısıyla bir en küçük elemanı vardır. İşte X'in bu elemanını seçelim. X'ten bu yöntemle seçtiğimiz elemana $f(X)$ adını verelim.

Örneğin,

$$X = \{a/b : a \text{ asal ve } a^2 + b^2 \text{ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez}\}$$

ise,

$$\begin{aligned} A(X) &= \{a + b : a \text{ asal ve } a^2 + b^2 \text{ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez}\} \\ &= \{5,\ 6,\ \ldots\} \end{aligned}$$

kümesidir. $A(X)$ kümesinin en küçük elemanı 5'tir ($a = 3$, $b = 2$ ya da $a = 2$, $b = 3$). Dolayısıyla yukarıda açıkladığımız yöntemle X'ten $2/3$'ü seçeriz, yani $f(X) = 2/3$ olur.

d. Boş olmayan kesirli sayı kümelerinden de birer eleman seçebiliriz. $X \subseteq \mathbb{Q}$ boş olmayan bir küme olsun. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boş değilse, yukarıdaki yöntemi kullanalım ve $f(X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşkümeyse, $(-X) \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ kümesi boş değildir, o zaman da X'yen $-f\left((-X) \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}\right)$ elemanını seçelim.

e. Gerçel sayılar kümesinin

$$\begin{aligned} &[a, b], [a, b), (a, b], (a, b), \\ &(-\infty, a], (-\infty, a), [a, \infty), (a, \infty), (-\infty, -\infty) \end{aligned}$$

gibi altkümelerine **aralık** adı verilir. Gerçel sayıların boş olmayan aralıklarından da belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) aralıklarından "orta noktayı", yani $(a+b)/2$ noktasını, $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$ aralıklarından $a-1$ noktasını, $[a,\infty)$, (a,∞) aralıklarından $a+1$ noktasını ve $(-\infty,-\infty)$ aralığından (gene orta noktayı!) 0 noktasını seçelim.

f. Yapamayacağınızı iddia ettiğim asıl sorum şu: Boş olmayan gerçel sayı kümelerinin herbirinden belli bir yöntemle bir sayı seçebilir misiniz? Seçim aksiyomunu kullanmadan yapamazsınız.

Dördüncü Soru: Gerçel sayılar kümesinin öyle bir X altkümesini bulun ki, her r gerçel sayısı belli bir

$$x_1,\ldots,x_n \in X$$

ve

$$q_1,\ldots,q_n \in \mathbb{Q}$$

için,

$$q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_nx_n$$

olarak yazılsın ve r'nin bu tür bir başka yazılımı (sıralama farkı dışında) olmasın.

Beşinci Soru: $\mathbb{Q}$'nün aşağıdaki iki özelliği sağlayan A altkümelerine bakalım:

1. Eğer x ve y kesirli sayıları A'daysa, $x-y$ sayısı da A'dadır.
2. $1 \notin A$.

Böyle bir küme var mıdır? Evet! Örneğin çift tamsayılar kümesi, yani $2\mathbb{Z}$. Çift tamsayıların farkı gene bir çift sayıdır ve 1 çift sayı değildir.

Peki, $\mathbb{Q}$ kümesinin bu tür altkümelerinin en büyüğünü bulabilir miyiz?

Yanıt gene evet!

$$A = \{2a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \text{ bir tek tamsayı}\},$$

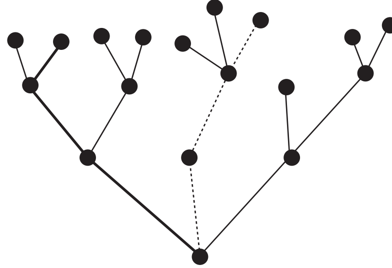
yani payı çift olan kesirli sayıların kümesi işte böyle bir kümedir (kanıtı kolay) ve bu tür kümelerin en büyüğüdür (kanıtı biraz daha zor).

Bunlar yapılabilir. Şimdi gerçel sayılar kümesine geçelim. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir A bulmaya çalışın:

1. $A \subseteq \mathbb{R}$.
2. A çıkarma altında kapalı.
3. $1 \notin A$.
4. A, yukarıdaki özellikleri taşıyan kümelerin en büyüğü olsun. Yani B kümesi yukarıdaki üç özelliği sağlıyorsa ve $A \subseteq B$ ise, $A = B$ olsun.

Deneyin, eğer Seçim Aksiyomu'nu bilmiyorsanız ve kullanmamışsanız, yukarıdaki dört özelliği sağlayan bir A kümesi bulamayacaksınız.

Altıncı Soru: Bir ağaç şöyle bir şeydir:



Kara noktalara ***budak*** diyelim. Her budaktan çıkan dallara da **dal** diyelim... Birbirinin peşisıra gelen dal dizilerine de **yol** diyelim. Örneğin yukarıda kesik çizilmiş üç dal bir yol oluşturur. Koyu çizgiler de bir başka yoldur.

Şu teoremi kanıtlamaya çalışın: Eğer bir ağacın her budağından sonlu sayıda dal çıkıyorsa, ama ağaçta sonsuz sayıda budak varsa, o zaman, ağaçta sonsuz sayıda dalın (ya da budağın) olduğu bir yol vardır.

Bu teorem matematikte *König Önsavı* olarak bilinir.

Matematiğin en bilinen yöntemleriyle bu teoremi kanıtlayamazsınız.

Yedinci Soru: Eğer sonsuz bir küme

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

biçiminde doğal sayılarla sayılandırılıyorsa, bu kümeye ***sayılabilir sonsuzlukta*** küme diyelim. Örneğin, doğal sayılar sayılabilir sonsuzluktadır. Çift sayılar da sayılabilir sonsuzluktadır. Asal sayılar kümesi de. Asal sayılar kümesini şöyle sayılandırabiliriz:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 3 \\ a_2 &= 5 \\ a_3 &= 7 \\ a_4 &= 11 \\ a_n &= n + 1\text{'inci asal} \end{aligned}$$

Genel olarak, doğal sayılar kümesinin her sonsuz altkümesi sayılabilir sonsuzluktadır. $\mathbb{Z}$ kümesi de sayılabilir sonsuzluktadır:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= -1 \\ a_3 &= 2 \\ a_4 &= -2 \\ a_5 &= 3 \\ \ldots & \quad \ldots \\ a_{2n} &= -n \\ a_{2n+1} &= n + 1 \end{aligned}$$

Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ de sayılabilir sonsuzluktadır.

Öte yandan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ sayılabilir sonsuzlukta değildir. Değildir ama sayılabilir sonsuzlukta bir altküme içerir: doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi.

Her sonsuz kümenin, sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi olması gerekmez mi? Evet diyorsanız haklısınız, olması gerekir. Kanıtlayın o zaman! Eğer seçim aksiyomunu bilmiyorsanız başaramayacaksınız.

Seçim aksiyomunu bilmeyen okurun bu olguları kanıtlayamayacağını söylemiştim. Bu, bir kanı ya da yargı değildir, bir kesinliktir. Seçim aksiyomu kullanılmadan bu olguların kanıtlanamayacağı kanıtlanmıştır.

Seçim Fonksiyonları ve Seçim Aksiyomu

Sonsuz sayıda ayakkabı çifti var ve biri sizden her çiftten bir adet getirmenizi istiyor... Her çiftten sol ayakkabıyı seçebilirsiniz örneğin. Ya da hep sağ ayakkabıyı... Ya da bir sağ bir sol ayakkabıyı... Yani iki ayakkabıdan birini seçmek için bir kural bulabilirsiniz.

Şimdi, diyelim sonsuz sayıda ayakkabı çifti degil de, sonsuz sayıda çorap çifti var. Her çiftten birini seçeceksiniz... Çorapların sağı solu belli olmadığından bu sefer belli bir kural bulamazsınız. Çorapların biri sağda biri solda olsa ya da biri üstte biri altta olsa ya da biri yırtık biri pırtık olsa, o zaman çorap seçme kuralını koymak kolay. Sorun, sonsuz sayıda çorap çifti olduğunda ve çiftleri oluşturan çoraplardan birini diğerinden ayırt edemediğimizde.

Ayaktakımını bir kenara bırakıp matematik dünyasına dönelim.

$$X = \{\{1,\ 2\},\ \{3,\ 4\},\ \{5,\ 6\},\ \ldots\}$$

olsun. Yani X bir küme ve elemanları bir n doğal sayısı için,

$$\{2n+1, 2n+2\}$$

biçiminde. X'in her elemanı iki elemanlı bir küme. Amacımız X'in her elemanından bir eleman seçmek. X'in her elemanı iki doğal sayıdan oluştuğuna göre, bu doğal sayıların en büyüğünü seçebiliriz: $\{1,\ 2\}$'den 2'yi, $\{3,\ 4\}$'ten 4'ü ve genel olarak $\{2n+1,\ 2n+2\}$ kümesinden $2n+2$ elemanını seçebiliriz.

Başka seçim yöntemleri de olabilir elbet. Amacımız seçim yöntemlerinden birini bulmaktı ve başardık.

Bir başka örnek: Eğer

$$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \ldots\}$$

ise, 1, X'in her elemanında olduğundan, hep 1'i seçebiliriz. Böylece X'in her elemanından bir eleman (1'i) seçmiş olduk.

Birazdan örneklerimizi artıracağız ve seçimin her zaman kolay, hatta kimileyin mümkün bile olmadığını göreceğiz.

Soruyu daha matematiksel olarak şöyle ifade edelim. Elinizde bir X kümesi var. Bu kümenin elemanları da küme ve hiçbiri boş değil. X'in her elemanından bir eleman (örnek, numune, eşantiyon) seçmek istiyoruz. Eğer $x \in X$ ise, x'ten seçilen numuneye $f(x)$ adını verelim. $f(x)$'ten tek istediğimiz x'in bir elemanı olması, yani $f(x) \in x$ koşulu.

Bir başka deyişle, kalkış kümesi X olan öyle bir f fonksiyonu bulmak istiyoruz ki, her $x \in X$ için, $(x) \in x$ olsun. Böyle bir fonksiyona X'in ***seçim fonksiyonu*** denir.

Elbette X'in bir seçim fonksiyonu olabilmesi için, X'in öğelerinin (ki bu öğeler de birer küme) hiçbirinin boşküme olmaması gerekir.

Bu yazıda soracağımız soru şu: *Elemanları boş olmayan kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu var mıdır*?

Sorunun zorluk derecesini örneklerle ölçeceğiz. Bundan sonraki yazılarda da sorunu derinlemesine tartışacağız.

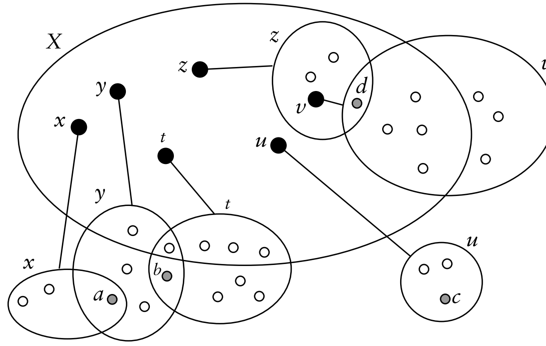
Kolay Şıklar

Eğer X, aşağıdaki şekildeki gibi, elemanları boş olmayan kümeler olan **sonlu** bir kümeyse, o zaman X'in bir seçim fonksiyonunu bulmak çok basittir: X'in her elemanından bir eleman alın, olsun bitsin! Sonlu tane çorap çiftinin her birinden bir adet seçmeyi herkes bilir... Sorun X sonsuz olunca...

X sonlu olduğunda bir seçim fonksiyonunun olduğu X'in eleman sayısı üzerine tümevarımla kolaylıkla tanımlanabilir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Eğer X'in elemanlarının ortak bir elemanı varsa, o zaman da kolay, hep o ortak elemanı seçelim. Örneğin yukarıdaki örneklerden birinde, 1, X'in bütün elemanlarının ortak elemanıydı ve biz hep 1'i seçmiştik.

Eğer X'in her elemanında (ki bu elemanlar da birer küme, tekrarlıyoruz), a ve b diye adlandıracağımız iki elemandan biri varsa, o zaman da seçim kolay: X'in herhangi bir x elemanını alalım. Eğer $a \in x$ ise a'yı seçelim, yani $f(x) = a$ olsun. Eğer $a \notin x$ ise, o zaman x'ten b'yi seçelim, yani bu durumda $f(x) = b$ olsun.



Yukarıda, X kümesinin x, y, z, t, u ve v olmak üzere 6 elemanı görülüyor. Bu elemanları resimde siyah noktalar olarak gösterdik. x, y, z, t, u ve v'nin herbiri ayrıca birer küme. x, y, z, t, u ve v'yi ayrıca bir de küme olarak, "oval patatesler" olarak gösterdik. Bu altı kümenin elemanlarını (biri hariç, v) içi beyaz ya da gri "nokta"larla gösterdik. Örneğin a, hem x'in hem de y'nin bir elemanı. v'nin z'nin bir elemanı olduğuna dikkat edin. X kümesinin bir seçim fonksiyonu şöyle olabilir: $f(x) = a \in x$, $f(y) = a \in y$, $f(t) = b \in t$, $f(u) = c \in u$, $f(z) = v \in z$, $f(v) = d \in v$.

Bunlar kolay şıklar. Şimdi işi biraz zora sokalım. Problemlerimiz giderek zorlaşacak, en sonunda imkânsız hale gelecek.

İşler Zorlaşıyor

$\wp(A)^\star$, A'nın boş olmayan altkümelerinden oluşan küme olsun: $\wp(A)^\star = \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$. Yazının bundan sonrasında çeşitli A'lar için $\wp(A)^\star$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulmaya çalışacağız. Eğer A'nın n elemanı varsa, $\wp(A)^\star$ kümesinin $2^n - 1$ elemanı vardır, ama bizi daha çok A'nın sonsuz olduğu durumlar ilgilendiriyor.

Örnek 1. $\wp(\mathbb{N})^\star$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan her doğal sayı kümesinden kolaylıkla bir eleman seçebiliriz; örneğin kümenin en küçük elemanını seçebiliriz. Bu yöntemle, sözgelimi, $\{1, 5, 8\}$ kümesinden 1'i, çift sayılar kümesinden 0'ı, asal sayılar kümesinden 2'yi seçeriz. Yani, seçim fonksiyonuna f dersek, $f(\{1, 5, 8\}) = 1$ olur.

Bu soru da oldukça kolaydı. Şimdi biraz daha zor bir soru soralım:

Örnek 2. $\wp(\mathbb{Z})^\star$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan her tamsayı kümesinden de eleman seçme yöntemleri vardır. Örneğin şu yöntemi alalım: $\emptyset \neq x \subseteq \mathbb{Z}$ olsun. Eğer x'in en büyük elemanı varsa o en büyük elemanı seçelim. Eğer x'in en büyük elemanı yoksa o zaman $x \cap \mathbb{N}$ kümesi boşküme olamaz, bu kümenin en küçük elemanını seçelim. Böylece boş olmayan her tamsayı kümesinden bir eleman seçmiş olduk.

Bu yöntemle $\{-5, 2, 6\}$ kümesinden en büyük sayı olan 6'yı, $5\mathbb{Z} + 3$ kümesinden 3'ü seçeriz.

Bunun da üstesinden geldik.

$\wp(\mathbb{Z})^\star$ kümesinin başka seçim fonksiyonları da vardır. Biz bunlardan sadece birini bulduk. Hepsini bulmak gibi bir amacımız yoktu.

Dikkat ederseniz her seferinde x'ten seçilen $f(x)$ elemanı için bir kural ortaya koyuyoruz. Bu kurala uyan biri söylenen elemanı seçmek zorundadır, "onu mu seçeyim, bunu mu seçeyim" gibi bir ikilemi olamaz.

Örnek 3. $\wp\left(\mathbb{Q}^{\geq 0}\right)^\star$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan bir pozitif kesirli sayılar kümesinden bir sayı nasıl seçeriz? Birçok seçim yöntemi vardır. İşte bunlardan biri: Kümeye x diyelim. Yani $\emptyset \neq x \subseteq \mathbb{Q}$ olsun. Şimdi şu kümeyi tanımlayalım:

$$A(x) = \{a + b : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \text{ ve } a/b \in x\}.$$

x boşküme olmadığından, $A(x)$ de boş değildir. Boş olmayan her doğal sayı kümesi gibi, $A(x)$'in en küçük elemanı vardır.

Bu elemana $n(x)$ diyelim. Şimdi,

$$\{a/b \in x : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \text{ ve } a+b = n(x)\}$$

kümesine bakalım. Bu, sonlu bir kesirli sayılar kümesidir, ayrıca boşküme değildir, dolayısıyla en küçük elemanı vardır. İşte x kümesinden bu elemanı seçelim.

Örneğin,

$$x = \{a^2/b \in \mathbb{Q}^{\geq 0} : a \text{ asal}, b \in \mathbb{N} \text{ ve } a^2+b^2 \text{ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez}\}$$

ise,

$$A(x) = \{c+d : a^2+b^2 \text{ sayısının 4'e ve 5'e bölünmediği bir } a \text{ asalı ve bir } b \in \mathbb{N} \text{ sayısı için, } c/d = a^2/b\}$$

kümesidir. $A(x)$ kümesinin en küçük elemanı 7'dir ($a = 2$, $c = 4$, $b = d = 3$ alın). Dolayısıyla yukarıda açıkladığımız yöntemle x'ten $2/3$ sayısını seçeriz.

Bulduğumuz bu seçim fonksiyonu aşağıda gerekecek, ona bir ad verelim: f. Örneğin, yukarıdaki örnekte, $f(x) = 2/3$.

Küme karmaşıklaştıkça seçim fonksiyonu bulmanın da zorlaştığına dikkatinizi çekerim. Bir zaman sonra imkânsız hale gelecek... Matematiksel olarak olmasa da fiziksel olarak imkânsız...

Örnek 4. *$\wp(\mathbb{Q})^\star$ kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan kesirli sayı kümelerinden de birer eleman seçebiliriz. $X \subseteq \mathbb{Q}$ boş olmayan bir küme olsun.

Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşküme değilse, yukarıdaki yöntemi kullanalım ve $f(X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim.

Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşkümeyse, o zaman $X \cap \mathbb{Q}^{<0}$ ve dolayısıyla $-X \cap \mathbb{Q}^{>0}$ kümeleri boş değildir; bu durumda X kümesinen $-f(-X \cap \mathbb{Q}^{>0})$ elemanını seçelim.

Genel olarak, eğer X sayılabilir bir kümeyse (yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile aralarında bir eşleme varsa), $\wp(X)^\star$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulmak oldukça kolaydır. Nitekim,

$f : X \to \mathbb{N}$ fonksiyonu X'ten $\mathbb{N}$'ye giden bir eşleme olsun. Ve $\emptyset \neq x \subseteq X$ olsun. Eğer n, $f(x)$'in en küçük elemanıysa, x'ten $f^{-1}(n)$ elemanını seçeriz.

Örnek 5. *Aralıklar kümesinin seçim fonksiyonu.*

Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b),$$

$$(-\infty, a], (-\infty, a), [a, \infty), (a, \infty), (-\infty, \infty)$$

gibi altkümelerine **aralık** adı verilir. Gerçel sayıların boş olmayan aralıklarından da belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. İşte bir yöntem:

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$$

aralıklarından "orta noktayı", yani $(a + b)/2$ sayısını, $(-\infty, a]$ ve $(-\infty, a)$ aralıklarından $a - 1$ sayısını, $[a, \infty)$ ve (a, ∞) aralıklarından $a + 1$ sayısını ve son olarak $(-\infty, -\infty)$ aralığından 0 sayısını (gene orta noktayı!) seçelim.

Örnek 6. $\wp(\mathbb{R})^\star$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

İşte şimdi en civcivli soruya geldik. Yukarıdaki örneklerde kimileyin kolayca kimileyin biraz zorlanarak da olsa, her seferinde bir seçim fonksiyonu bulduk. Ama bu kez bir seçim fonksiyonu bulmak hiç kolay değil.

Hemen söyleyelim: $\wp(\mathbb{R})^\star$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulamazsınız. İstediğiniz kadar deneyin... Sadece siz değil, kimse bulamaz!

Bu kümenin seçim fonksiyonu yok demiyorum. Yoksa elbet bulamazsınız. Var da demiyorum... Ama varsa da bulamazsınız!

Bu kümenin bir seçim fonksiyonunun olduğu ancak şu aksiyomla kanıtlanabilir:

Seçim Aksiyomu (C). *Elemanları boş olmayan kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır.*

Bu aksiyom kullanılarak $\wp(\mathbb{R})^\star$ kümesinin bir seçim fonksiyonu olduğu kanıtlanabilir (elbette!), ama o seçim fonksiyonunun kuralı bulunamaz! Yani açık açık seçim fonksiyonunu

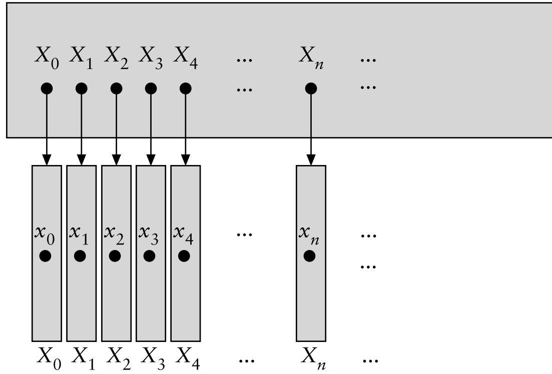
yazamazsınız. Bir başka deyişle, varlığı **ancak** yukarıdaki aksiyom kullanılarak kanıtlanan bir seçim fonksiyonunun "kuralı" yoktur. Olamaz da.

Okur haklı olarak böyle bir fonksiyonun neden olamayacağını soruyordur; hatta belki de yazıyı iyi anlayamadığını sanıyordur.

Şöyle bir örnek verelim. X, elemanları kesişmeyen kümelerden oluşan sonsuz bir küme olsun. Daha tane tane söyleyelim: X bir küme, X'in elemanları da küme ve X'in herhangi iki elemanının kesişimi boşküme. Diyelim X, sayılabilir sonsuzlukta. X'in elemanlarını teker teker sayıp numaralandıralım: Bu elemanlara

$$X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$$

diyelim. Bunların her biri bir küme, hiçbiri boş değil, ama herhangi ikisinin kesişimi boşküme. Bu boş olmayan her kümeden bir eleman seçmek istiyoruz.



Birinci küme olan X_0'dan x_0 adını vereceğimiz bir eleman seçelim. X_0 boş olmadığından, böyle bir elemanın varlığını biliyoruz. Şimdi sıra X_1 kümesinde. Bu kümeden de rahatlıkla bir eleman seçebiliriz. Seçtiğimiz elemana x_1 diyelim. Bunu böylece hep sürdürebiliriz. X_n kümesinden seçilen elemana x_n diyelim. Şimdi f fonksiyonunu

$$f(X_n) = x_n$$

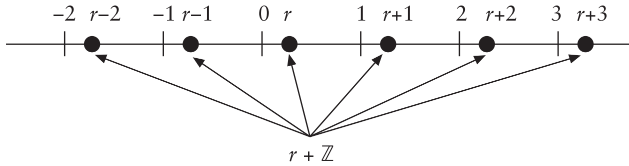
olarak tanımlayalım. Her n için $f(X_n) \in X_n$ olduğundan sorun yok gibi görünebilir. Ama var... Sorun f'nin bir fonksiyon olduğunu kanıtlamada. f, bir fonksiyon olmayabilir. Biliyoruz ki fonksiyonlar da dahil olmak üzere ZFC kümeler kuramında her şey bir küme olmalıdır. f'nin bir fonksiyon olması için de, sadece bu x_n'leri içeren $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ nesnesinin bir küme olması gerekir. Bu nesnenin bir küme olduğu matematiğin en basit aksiyomlarıyla kanıtlanamaz; kanıtlanamayacağı kanıtlanmıştır.

Örnek 7. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Her r gerçel sayısı için,

$$r + \mathbb{Z} = \{r + n : n \in \mathbb{Z}\}$$

olsun. Bu örnekte her $r + \mathbb{Z}$ kümesinden bir eleman seçmeye çalışacağız.



Elbette r, $r + \mathbb{Z}$ kümesinin bir elemanıdır, dolayısıyla $r + \mathbb{Z}$ kümesinden r'yi seçelim diyebilirsiniz. Ama $r + \mathbb{Z}$ kümesi r'yi belirlemiyor ki... Nitekim, birbirinden değişik r ve s sayıları için, $r + \mathbb{Z} = s + \mathbb{Z}$ olabilir. Örneğin,

$$\sqrt{2} + \mathbb{Z} = (1 + \sqrt{2}) + \mathbb{Z} = (-3 + \sqrt{2}) + \mathbb{Z}$$

olur.

Yukarıda sözü edilen sorunu iyice anlamak için sorumuzu şöyle görelim:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{R}\}$$

olsun. Amacımız $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'nin her elemanından bir eleman seçmek. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'den herhangi bir eleman alalım. Bu elemana α diyelim. Elemanı özellikle α diye yazdık, $r + \mathbb{Z}$ diye r'yi önplana çıkaracak biçimde yazmadık. Her ne kadar α, birçok r için $r + \mathbb{Z}$'ye eşitse de, tüm bu r'ler arasından hangisini seçmeliyiz?

Aslında her bir $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan bir $r \in \mathbb{R}$ seçebiliriz. Ama bu seçimlerde bir düzen olmazsa, yani seçimleri belli bir kurala bağlı kalarak yapmazsak, o zaman seçilen r'lerin bir küme oluşturduğunu durduk yerde söyleyemeyiz.

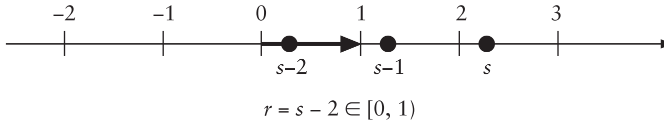
Bu örnekte, belli bir kurala bağlı kalarak, her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için,

$$\alpha = r + \mathbb{Z}$$

eşitliğini sağlayan bir $r \in \mathbb{R}$ seçebiliriz. Nitekim, her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için,

$$\alpha = r + \mathbb{Z}$$

eşitliği sağlayan bir ve bir tek $r \in [0, 1)$ vardır. İşte α'dan, $[0, 1)$ aralığındaki bu r sayısını seçelim. Bu sefer binlerce (!) r'den rastgele birini seçmedik, $[0, 1)$ aralığında bulunan $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan tek r'yi seçtik.



$r = s - 2 \in [0, 1)$

Bu yöntemle, $\pi + \mathbb{Z}$ kümesinden $\pi - 3$ sayısını, $\sqrt{2} + \mathbb{Z}$ kümesinden $\sqrt{2} - 1$ sayısını seçeriz.

Eğer bir $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ verilmişse, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan $r \in [0, 1)$ pratikte nasıl bulunur? Şöyle bulunur: Önce, $\alpha = s + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan herhangi bir s alınır. Böyle bir s'nin varlığını biliyoruz. Şimdi, s'ye yeterince 1 ekleyerek ya da s'den yeterince 1 çıkararak, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan bir $r \in [0, 1)$ sayısına ulaşırız. Ayrıca, $[0, 1)$ aralığında bu eşitliği sağlayan başka bir sayı da yoktur.

Burada s'yi belli bir kurala uymadan seçtiğimizi belirtelim. Seçim Aksiyomu'nu kullanmadan buna hakkımız var mı? Var! Çünkü $[0, 1)$ aralığında bulunan r sayısı s'nin seçiminden bağımsızdır. $\alpha = s + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan hangi s'yi seçersek seçelim, aynı r'ye ulaşırız. Burada Seçim Aksiyomu'na ihtiyacımız yok. Aslında r, $s - [s]$'dir ve α'dan hangi s seçilirse

seçilsin, $s - [s]$ hep aynı sonucu verir. Burada Seçim Aksiyomu'nu kullanmadık. Her α için bir $s \in \alpha$ seçtik ama kanıtımızda bu seçimlerin bir küme oluşturmasına ihtiyacımız olmadı.

Sonuç: Yukarıda tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'nin bir seçim fonksiyonudur ve Seçim Aksiyomu'na ihtiyaç duyulmadan bulunmuştur.

$[0, 1)$ aralığının şu özelliği önemli: Her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için,

$$|\alpha \cap [0, 1)| = 1$$

olur.

Örnek 8. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

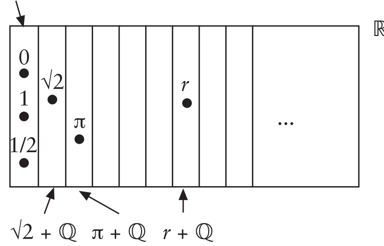
Her r gerçel sayısı için,

$$r + \mathbb{Q} = \{r + q : q \in \mathbb{Q}\}$$

olsun. Bu sefer her $r + \mathbb{Q}$ kümesinden bir eleman seçmeye çalışacağız. Yani,

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{r + \mathbb{Q} : r \in \mathbb{R}\}$$

ise, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$'nün bir seçim fonksiyonunu bulacağız. Bu, her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ için, $|\alpha \cap X| = 1$ eşitliğini sağlayan bir $X \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi bulmaya eşdeğerdir.



$r, s \in \mathbb{R}$ için, $r + \mathbb{Q}$ ve $s + \mathbb{Q}$ kümeleri ya eşittir ya da ayrıktırlar. (Okura alıştırma.)

Elle bulamayız. Sadece biz değil kimse bulamaz. Böyle bir seçim fonksiyonunu ancak yukarıdan birileri bize verebilir, ama kuralını söylemeden...

Bu sefer seçim fonksiyonunu bulmak için Seçim Aksiyomu'nu kullanmak zorundayız. Seçim Aksiyomu olmadan böyle bir fonksiyon bulamayız. İnanmazsanız bulmaya çalışın! Başaramayacağınızı göreceksiniz.

Seçim Aksiyomu Neden Doğaldır?

Bu yazıda okuru Seçim Aksiyomu'nun neden doğal bir aksiyom olduğuna ikna etmeye çalışacağız. Bu yazı da okuru ikna etmezse hiçbir şey etmez!

Çıkış noktamız Bertrand Russell'ın çok bilinen sonsuz sayıda çorap çifti örneği. Sonsuz sayıda çorap çiftimiz var ve her çorap çiftinden bir tane çorap seçeceğiz. Çorap yerine ayakkabı çifti olsaydı, örneğin hep sol ayakkabıyı seçerek kolayca bir seçim yapabilirdik. Ama çorap çiftlerinin sağı solu belli olmadığından, sonsuz sayıdaki çorap çiftinin her birinden bir tekini seçmekte zorlanırız. Sonlu sayıda çorap çifti olsa, sorun olmaz da, sonsuz sayıda çorap çiftinden birini hiçbir kurala bağlı kalmaksızın seçim yapabilmek hiç de bariz değildir.

Russell'ın örneğini aklımızda tutup, bir başka konuya geçelim. Bağlantıyı daha sonra kuracağız.

Sayılabilir sonsuzlukta bir X kümemiz olsun. Sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, X'in elemanlarını

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots$$

olarak sıraya dizebiliriz. Zaten sayılabilir demek aynen bu demektir: Elemanları teker teker doğal sayılarla numaralandırılabilen kümelere sayılabilir denir. Doğal sayılar kümesi sayılabilirdir mesela. Ama $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri de sayılabilir kümelerdir.

Şimdi de her x_n'nin iki elemanlı bir küme olduğunu varsa-

yalım. Elemanları, x_{n0} ve x_{n1} olsun. Demek ki,

$$\begin{aligned} x_0 &= \{x_{00}, x_{01}\}, \\ x_1 &= \{x_{10}, x_{11}\}, \\ x_2 &= \{x_{20}, x_{11}\}, \\ x_3 &= \{x_{30}, x_{11}\}, \\ &\ldots \\ x_n &= \{x_{n0}, x_{n1}\}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Şimdi bu x_n kümelerinin bileşimini alalım:

$$\begin{aligned} \bigcup X = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n \\ = \{x_{00}, x_{01}\} \cup \{x_{10}, x_{11}\} \cup \ldots \cup \{x_{n0}, x_{n1}\} \cup \ldots \\ = \{x_{00},\ x_{01},\ x_{10},\ x_{11},\ \ldots,\ x_{n0},\ x_{n1},\ \ldots\}. \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $\bigcup X$ sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir, elemanlarını 0, 1, 2, 3 diye doğal sayılarla sayabiliyoruz. Nitekim, $y_{2n+i} = x_{ni}$ olsun:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_{00}, \\ y_1 &= x_{01}, \\ y_2 &= x_{10}, \\ y_3 &= x_{11}, \\ y_4 &= x_{20}, \\ y_5 &= x_{21}, \\ y_6 &= x_{30}, \\ y_7 &= x_{31}, \\ &\ldots \\ y_{2n} &= x_{n0}, \\ y_{2n+1} &= x_{n1}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Burada bir teorem kanıtladık.

Teorem 1. *Her elemanı iki elemanlı bir küme olan sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin elemanlarının bileşimi sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir*[1].

[1] "Sayılabilir sonsuzlukta küme" nin tanımı için **Sezgisel Kümeler Kuramı** adlı kitabımıza bakabilirsiniz.

Şimdi çorap sorununa geri dönelim. Yukarıdaki her x_n bir çorap çiftini simgelesin. Çorapların teki x_{n0}, diğeri x_{n1}. Çorapları yukarıdaki gibi $y_{2n+i} = x_{ni}$ yöntemiyle numaralandıralım. Şimdi göstergeci çift olan çorapları, yani $y_0, y_2, y_4, y_6, \ldots$ çoraplarını seçelim...

Hani sonsuz tane çorap çiftinin her birinden bir tane seçemezdik? Seçtik işte!

Yukarıdaki kanıt biraz yanlış! Yanlışın nerede olduğunu açıklayalım. x_n iki elemanlı bir küme (bir çorap çifti) olsun. x_n'nin iki elemanı olduğundan bu iki elemandan birini **seçip** bu elemana x_{n0}, diğerine x_{n1} adını verebiliriz. Ama tüm x_n'ler için böyle bir seçim ve kodlama yapmaya hakkımız yok. (En azından hakkımızın olup olmadığını bilmiyoruz.)

Her x_n kümesiyle $\{0, 1\}$ kümesi arasında tam iki eşleme vardır. x_n'nin elemanlarından birine x_{n0}, diğerine x_{n1} adını vermek demek, bu iki eşlemeden birini seçmek demektir. Eğer eşlemelere f_n ve g_n dersek, her $\{f_n, g_n\}$ kümesinden bir eleman seçtik... Gene sonsuz bir kümeden yazılı bir kurala bağlı kalmaksızın seçim yapıyoruz... Bu ancak Seçim Aksiyomu'yla mümkündür.

Yukarıdaki teorem ancak Seçim Aksiyomu'nun yardımıyla kanıtlanabilir. Teoremin "doğruluğu"na inanıyorsak Seçim Aksiyomu'nu kabul etmeliyiz.

Bir Oyun, Seçim Aksiyomu ve Şaşırtıcı Bir Sonuç

Önce kolay oyundan başlayalım. Asıl oyun ve şaşırtıcı sonuç sonra gelecek.

Padişah 100 kişiyi idama mahkûm etmiş. Ama o kadar da insafsız değilmiş; mahkûmlara son bir şans daha vermek istemiş.

– Yarın, sabahın köründe hepinizi sıraya dizeceğim, demiş. Hepinizin kafasına siyah ya da beyaz bir şapka giydireceğim. Herkes önündekilerinin şapkasını görecek ama arkasındakilerinin şapkasını göremeyecek. Kimse kendi şapkasını da göremeyecek elbette. En arkadan, yani herkesi görenden başlayarak herkese teker teker şapkasının rengini soracağım. Doğru tahmin ederse affedeceğim, yanlış tahmin ederse idam edeceğim. Herkes arkasındakilerin tahminini duyacak. Bu işin altından en az zaiyatla nasıl kalkacağınızı düşünün bütün gece...

Mahkûmlar kara kara düşünmüşler. Biri,

– Padişahımız hiç olmazsa şapkaların yüzde kaç olasılıkla beyaz, yüzde kaç olasılıkla siyah olacağını söyleseydi, demiş. Böylece hepimiz olasılığı en yüksek olan rengi söyler ve büyük olasılıkla yarımız ve belki de daha da fazlamız kurtulurdu...

– Acaba bizden önce tahminde bulunan arkadaşların akıbetini bilebilecek miyiz? diye sormuş biri.

– Bilinmez ki demiş bir başkası... Padişah bu!

Mahkûmlar iç çekmişler. En akıllılarından biri şöyle bir öneride bulunmuş:

– En arkadaki hemen önündekinin şapkasının rengini söylesin. Böylece kendisi kurtulamasa bile onun önündeki kurtulur. Üçüncü arkadaş da hemen önündekinin şapkasının rengini söylesin. Böyle devam edelim. Tek sıradaki arkadaşlar hemen önlerindeki arkadaşın şapkasının rengini söylesin. Böylece en azından yarımız kesinlikle kurtulur. Eğer şapkaların siyah ya da beyaz olma olasılığı yüzde elliyse, geri kalan 50 kişinin de yüzde ellisi, yani 25'i kurtulur. Böylece aşağı yukarı 75'imiz kurtulmuş olur.

Bir öncekinden daha iyi olan bu öneri sevinçle karşılanmış doğal olarak. O zamana kadar sessiz kalan en akıllıları birden yerinden fırlayarak,

– Buldum! diye haykırmış, belki bir kişinin idam edileceği, ama geri kalan herkesin kurtulacağı bir strateji buldum.

Diğerleri pek inanmamışlar ama ne yapsınlar, umut umuttur. En akıllı mahkûm devam etmiş:

– En arkadaki mahkûm gördüğü beyaz şapkaları sayar. Eğer tek sayıda beyaz şapka görüyorsa beyaz tahmininde bulunur, çift sayıda beyaz şapka görüyorsa da siyah tahmininde bulunur...

– Eee? demiş diğerleri.

– E'si şu ki, böylece hepimiz en arkadakinin önündeki beyaz şapka sayısının tek ya da çift sayı olduğunu biliriz. Diyelim birinci mahkûm önünde tek sayıda şapka saydı ve beyaz dedi. İkinci mahkûm da önündeki şapka sayısını saysın. Eğer çift sayıda beyaz şapka görüyorsa, şapkası beyaz demektir, tek sayıda şapka görüyorsa, şapkası siyah demektir...

Bir mırıltı yükselmiş.

– Ya peki diğerleri, diye sormuş biri merakla.

– Diyelim ikinci mahkûm beyaz dedi ve tabii ki kurtuldu. Böylece üçüncü mahkûm, kendi şapkası dahil, beyaz şapka sayısının çift olduğunu anlar, çünkü arkasındakinin şapkası beyazmış. Eğer üçüncü mahkûmun önünde tek sayıda beyaz şapka varsa, kafasında beyaz şapka var demektir, aksi halde siyah şapka olmalı. Böylece o da doğru tahminde bulunarak kurtulur. Bu mantıkla devam edersek en arkadaki ilk tahmini yapan

arkadaş dışında herkes kurtulur. En arkadaki ilk tahmini yapan da şansı varsa kurtulur...

Birinci hikâyemiz burada bitiyor. Bu çözüm bile oldukça şaşırtıcı ama daha da şaşırtıcı sonuçlara hazırlanın.

Bir başka padişah, ilk hikâyedekinden daha acımasız bir padişah, 100 kişiyi değil sonsuz kişiyi idama mahkûm etmiş. Her mahkûmun da bir numarası varmış: 0, 1, 2, ... Ne kadar doğal sayı o kadar mahkûm...

Padişah,

– Yarın, sabahın köründe hepinizi sıraya dizeceğim, demiş. En arkada 0 numara, sonra 1 numara, sonra 2 numara vs. Hepinizin kafasına ya siyah ya da beyaz renkli bir şapka giydireceğim. Herkes önündekilerinin şapkasını görecek ama arkasındakilerinin şapkasını göremeyecek. Kimse kendi şapkasını da göremeyecek elbette. En arkadan, yani herkesi görenden başlayarak herkese şapkasının rengini soracağım. Doğru tahmin ederse affedeceğim, yanlış tahmin ederse idam edeceğim. Herkes daha önce tahminde bulunmuş kişilerin tahminini duyacak. Bu işin altından en az zaiyatla nasıl kalkacağınızı düşünün bütün gece...

O sırada biri hapşırmış. Padişah bu saygısızlığa kızmış.

– Kimse daha önce yapılmış tahminleri duyamayacak...

Mahkûmlar hücrelerine çekilip düşünmeye başlamışlar. Durum zor! Hatta imkânsız gibi. Tahmin sırası kendilerine geldiğinde ellerinde hiçbir ipucu olmayacak.

Uzunca bir süreden sonra biri, ortaya atılıp,

– Sonlu sayıda arkadaş dışında herkesi kurtaracak bir yöntem var demiş...

İnanması güç ama gerçek... Sonlu sayıda mahkûm dışında herkesin kurtulacağı bir yöntem vardır.

Tabii Seçim Aksiyomu'na inanıyorsanız... Ki bu devirde Seçim Aksiyomu'na hemen hemen herkes inanır.

Yöntemi açıklamak için önce biraz "oyun"un matematiksel analizini yapalım.

Önce **b**eyaz şapka yerine 1 (**bir**), siyah şapka yerine 0 (sıfır) diyelim. Böylece padişahın mahkûmların kafalarına şapkaları

geçiriş biçimini bir 01-dizisiyle gösterebiliriz. Eğer padişah herkese siyah şapka giydirirse, o zaman

$$000000000000000\ldots$$

dizisi elde edilir. Eğer padişah 0'ıncı mahkûma beyaz, sonrakilere bir siyah, bir beyaz şapka giydirirse, dizi

$$01010101010101\ldots$$

dizisi olur. Her mahkûm şapkalaması bir 01-dizisi verir, her 01-dizisi de bir mahkûm şapkalamasına tekabül eder. Bundan böyle 01-dizisi yerine sadece "dizi" diyeceğiz.

Belli bir aşamadan sonrası eşit olan dizilere ***denk*** diziler diyelim. Yani sonlu sayıdaki ilk birkaç terim dışındaki **tüm** terimlerin eşit olduğu dizilere denk diyelim. Örneğin,

$$0011010101010101010101\ldots$$

dizisiyle

$$0110110101000101010101\ldots$$

dizisi denktirler, çünkü her ikisinde de **aynı aşamada** 01 sayısı **sonsuza dek** tekrar eder, ya da şöyle söyleyelim: İlk 12 terim dışında iki dizi birbirine eşittir. Örneğin bir zaman sonra (ne kadar zaman sonra olduğu önemli değil) hep 0 olan diziler birbirine denktir. Bir başka örnek,

$$\begin{array}{l}
011011011011011011011\ldots\\
111011011011011011011\ldots\\
001011011011011011011\ldots\\
101011011011011011011\ldots\\
110011011011011011011\ldots
\end{array}$$

dizileri birbirlerine denktirler. Ama

$$0101010101\ldots \text{ ve } 10101010101010\ldots$$

dizileri birbirine denk değildir, çünkü her ne kadar birinin ilk terimini sildiğinizde diğer diziyi elde etsek de bu dizilerin n'inci

terimleri hep birbirinden değişik. İki dizinin denk olması için belli bir aşamadan sonra dizilerin n'inci terimleri **hep** birbirlerine eşit olmalı.

x ve y dizilerinin birbirlerine denk olduklarını

$$x \equiv y$$

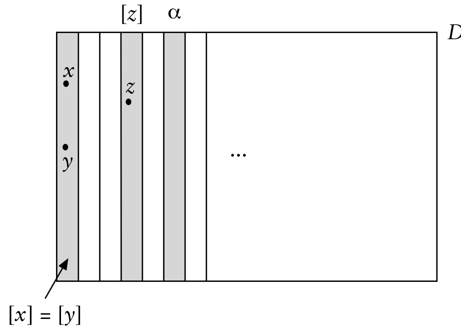
yazılımıyla gösterelim. Şu özelliklerin doğru oldukları bariz:

$$x \equiv x,$$
$$x \equiv y \text{ ise } y \equiv x,$$
$$x \equiv y \text{ ve } y \equiv z \text{ ise } x \equiv z.$$

Bir başka deyişle, $\equiv$ ilişkisi 01-dizileri kümesi üzerine bir "denklik ilişkisi"dir. 01-dizileri kümesine D diyelim. Bir x dizisi için,

$$[x] = \{y \in D : x \equiv y\}$$

olsun. x'e denk elemanlardan oluşan bu kümeye ***x'in sınıfı*** adı verilir.

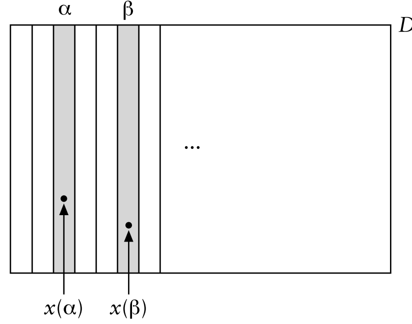


D kümesinin denklik sınıflarına parçalanışı. x ile y denk olduklarından aynı sınıftalar ve sınıfları birbirine eşit. $[z]$ bir başka sınıf. α da bir sınıf; α, ayrıca içinde bulunan her elemanın sınıfı. Eğer $t \in \alpha$ ise, $\alpha = [t]$ olur.

İki sınıf ya birbirine eşittir ya da birbirinden ayrıktır, yani her $x, y \in D$ için

$$\text{ya } [x] = [y] \text{ ya da } [x] \cap [y] = \emptyset$$

olur, ve birinci şık ancak ve ancak $x \equiv y$ ise olabilir, aksi halde ikinci şık doğrudur. (Aşağıdaki şekle bakın.) Bu, $\equiv$ ilişkisinin denklik ilişkisi olmasının, yani yukarıda sıraladığımız üç özelliğin doğrudan bir sonucudur ve kanıtı çok kolaydır.



Her sınıftan bir temsilci seçiliyor.

İdam günü arifesi, mahkûmlar her sınıftan (iki değil!) bir temsilci seçerler. Mahkûmların α sınıfından seçtikleri temsilciye $x(\alpha)$ diyelim:

$$x(\alpha) \in \alpha.$$

$x(\alpha)$, tüm mahkûmların hemfikir oldukları, α sınıfından seçilmiş herhangi bir dizidir. Elbette,

$$\alpha = [x(\alpha)]$$

olur, ne de olsa $x(\alpha)$ dizisi α sınıfından seçilmiş.

$x(\alpha)$ dizisinin terimlerini

$$x(\alpha)_0,\ x(\alpha)_1,\ x(\alpha)_2,\ x(\alpha)_3,\ \ldots$$

olarak gösterelim. Hatta herhangi bir x dizisinin terimlerini,

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

olarak gösterelim. x_n'lerin herbiri ya 0'dır ya da 1'dir elbette.

Mahkûmlar α sınıflarından seçtikleri $x(\alpha)$ dizilerini bir gece önce ezberlesinler.

Ertesi sabah mahkûmlar sıraya dizilip kafalarına şapka geçirildiğinde, her biri önündeki mahkûmların şapkasına bakarak padişahın şapkalarla belirlediği dizinin sınıfını anlarlar. Diyelim, padişah şapkalama yöntemiyle α sınıfını belirlemiş. Mahkûmlar α sınıfını bildikleri gibi, bir gece önceki çalışmaları sayesinde α sınıfından seçtikleri $x(\alpha)$ dizisini de bilirler. Padişahın

belirlediği diziyle $x(\alpha)$ dizisi ilk birkaç, diyelim 1 milyon terimi dışında aynıdır.

Sıranın en sonundaki mahkûm (ilk tahminde bulunan yani) $x(\alpha)_0$ tahmininde bulunur. Bir sonraki $x(\alpha)_1$ tahmininde bulunur. Mahkûmlar sırayla

$$x(\alpha)_0,\ x(\alpha)_1,\ x(\alpha)_2,\ x(\alpha)_3,\ \ldots$$

tahmininde bulunurlar ve böyle sonlu sayıda mahkûm dışında herkes kurtulur. (Mahkûmlar kaçıncı mahkûm olduklarını biliyorlar.)

Bunun neden böyle olduğu bariz olmalı ama gene de açıklayalım: Padişahın şapkaların renkleriyle belirlediği diziye x diyelim. Demek ki $[x] = \alpha$.

Anımsatalım: x_n, n'inci mahkûmun kafasındaki şapkanın rengi; $x(\alpha)_n$ ise, n'inci mahkûmun tahmini. Eğer

$$x_n = x(\alpha)_n$$

ise n'inci mahkûm kurtulacak, aksi halde idam edilecek.

Şimdi

$$[x] = \alpha = [x(\alpha)],$$

eşitliğine dikkatinizi çekeriz. Demek ki x dizisinin terimleriyle $x(\alpha)$ dizisinin terimleri bir zaman sonra çakışacaklar, yani bir zaman sonra **hep**,

$$x_n = x(\alpha)_n$$

olacak. Bu aşamadan itibaren tüm mahkûmlar kurtulacaklar...

Oldukça şaşırtıcı değil mi?

Daha da şaşırtıcı olanı şu: Böyle bir yöntem olduğunu kanıtladık ama böyle bir yöntem bulamayız, çünkü her sınıftan bir eleman seçmek, bu durumda ancak Seçim Aksiyomu'yla mümkündür, bizim durumumuzda Seçim Aksiyomu olmadan yapılamaz. (Yapılamayacağını kanıtlamadık, kanıtlayamayız da, kanıtlamak da kolay değildir.) Seçim Aksiyomu'nun illa gerekli olduğu bir seçim de elle bulunamaz.

Soru: 100 mahkûm olsun. Padişah mahkûmlara 1/3 olasılıkla beyaz, siyah ya da gri şapka giydirsin. En fazla mahkûmun

kurtulması için en iyi strateji nedir? (Bu soru, Sovyet Matematik Olimpiyatları'nda sorulmuş.)

Kapanış Sorusu: Eğer padişahın şapkaları dizerken elde edebileceği 01-dizileri ancak "hesaplanabilir" (yani terimleri bir formülle ya da bir bilgisayar programıyla hesaplanabilen, İngilizcesiyle *recursive*) diziler olabilirse (ki insanoğlu başka türlü dizi bulamaz), o zaman Seçim Aksiyomu'na başvurmadan sonlu sayıda mahkûm dışında herkesi kurtarabilir miyiz?

Kaynakça:

http://cornellmath.wordpress.com/2007/09/13/the-axiom-of-choice-is-wrong/

ZFC Kümeler Kuramı

Tüm matematiği kümeler kuramına dayandırabiliriz, yani matematik, en azından kuramsal olarak, kümeler kuramında ifade edilebilir, kümeler kuramının içinde yer alabilir. Örneğin topoloji, analiz, cebir, sayılar kuramı, diferansiyel denklemler, kompleks analiz gibi duyduğunuz ya da duymadığınız her matematik dalı kümeler kuramının bir altdalı olarak görülebilir. (Matematikte pek de merkezi olmayan kategori kuramını kaideyi bozmayan istisna olarak kabul edelim. Kategori kuramı küme olmayan nesnelerle ilgilenir.)

Dolayısıyla kümeler kuramı çelişkisizse, o zaman tüm matematik çelişkisiz demektir. Eğer $0 = 1$ eşitsizliği kümeler kuramında kanıtlanamıyorsa, kümeler kuramının ***çelişkisiz*** olduğu söylenir. Çelişkili bir kuramda, doğru olsun ya da olmasın, her önerme kanıtlanabilir (bkz. aşağıdaki gri kare).

Ama ne yazık ki kümeler kuramının çelişkisiz olduğu kanıtlanamaz. Bu, Gödel'in, çağının en büyük matematikçisi Hilbert de dahil olmak üzere, birçok kişiyi düşkırıklığına uğratan derin bir teoremidir.

Öte yandan kümeler kuramının çelişkili olduğu -eğer çelişkiliyse elbet- kanıtlanabilir. Bunun için $0 = 1$ eşitliğini kanıtlamak yeterlidir. Birazdan açıklayacağımız kümeler kuramında henüz böyle bir eşitlik kanıtlanamamıştır, umarız hiçbir zaman da kanıtlanamaz.

Bugün kimse ciddi olarak kümeler kuramının çelişkili olabileceğine ihtimal vermiyor. Genel kanı, "çelişkili olsaydı bugüne kadar bir çelişki bulunurdu" şeklinde.

Yukarıda, birinci paragrafta, "matematik, en azından **kuramsal olarak**, kümeler kuramında ifade edilebilir" dedik. Burada "kuramsal olarak" sözleri hafife alınmamalı. Matematiğin her dalını kümeler kuramına dayandırmaya çalışmak her ne kadar mümkünse de, böyle bir uğraşa girmek akla zarardır ve bu çabanın makul bir süre içinde başarıya ulaşması mümkün değildir. Üstelik bunu başarmak uygulamada pek bir işe de yaramaz.

20'nci yüzyılın başında matematikte çelişki bulunduğunda (bkz. *Russell Paradoksu* yazısı), kümeler kuramı çok daha ciddi bir biçimde ele alındı. Russell Paradoksu'ndan, kümeyi andıran her şeyin küme olamayacağı, sezginin yetmediği, çok daha dikkatli olunması gerektiği anlaşıldı ve yeni kümeler kuramları geliştirildi.

Birbirine aşağı yukarı eşdeğer birkaç kümeler kuramı vardır. Bunlardan en yaygın olarak kullanılanı ZFC kısaltmasıyla anılan ve büyük ölçüde ilk kez Ernst Zermelo tarafından ifade edilen kuramdır.

Bir Russell Anekdotu

Bir söylentiye göre, Bertrand Russell'a ukalalık yapmak isteyen biri,

– Madem, yanlış bir şeyden hareketle her şey kanıtlanabilir, $0 = 1$ eşitliğinden yola çıkarak papa olduğunuzu kanıtlayabilir misiniz? diye sorar.

Bertrand Russell da,

– Tabii ki, bundan kolay ne var... deyip devam eder: Eğer $0 = 1$ ise, her iki tarafa da 1 ekleyerek $1 = 2$ eşitliğine erişiriz. Şimdi papayla beni boş bir odaya koyun. Odada kaç kişi var?

– 2 kişi... der soruyu sorma gafletinde bulunan kişi, siz ve papa...

– Ama 2, 1'e eşit... Demek ki odada bir kişi var. Dolayısıyla ben papa olmalıyım...

Bunun dışında, örneğin, Bertrand Russell'ın tipler kuramı ve von Neumann, Bernays ve Gödel'in kümeler kuramı (NBG) vardır. Biz burada sadece ZFC'yi açıklamakla yetineceğiz. Zaten matematikçilerin çoğu ZFC'yi kullanmaktadır.

ZFC kümeler kuramının tanımsız iki terimi vardır: "Küme" ve "elemanı olmak".

Küme. ZFC'de sözü edilen her nesne (elemanlar, fonksiyonlar, sıralamalar vs) bir kümedir. Örneğin, "öyle bir x var ki" diye başlayan bir önerme, aslında "öyle bir x kümesi var ki" olarak okunmalıdır.

Elemanı Olmak. Bu, iki küme arasında bir ilişkidir ve bu da tanımsız olarak verilmiştir. "$x \in y$" yazılımı, "x, y'nin bir elemanıdır" **anlamına gelir** demeyeceğiz, çünkü tanımsız olduğundan "x, y'nin bir elemanıdır"ın anlamı yoktur; ama "$x \in y$" yazılımı, "x, y'nin bir elemanıdır" olarak okunur ve öyle de hissedilir.

"$x \notin y$" yazılımı ise, "x, y'nin bir elemanı değildir" anlamına gelir. Artık "x, y'nin bir elemanıdır" önermesinin anlamını bildiğimizi varsaydığımızdan, bu varsayıma dayanarak, "x, y'nin bir elemanı değildir"in ne demek olduğunu biliyoruz.

ZFC'de her nesne küme olduğundan, bir kümenin elemanları da kümedir. (Ortaokullarda ve liselerde elemanla küme apayrı şeylermiş gibi gösterilir, oysa kümeler kuramında öyle değildir.)

Tanımsız verilmiş bu "küme" ve "elemanı olmak" terimlerinin aşağı yukarı ne anlama gelmeleri gerektiğini biz sezgilerimizle biliriz elbet, ne de olsa hayat tecrübemiz var, ama kuram bunu bilmez.

Kümeler kuramının (ve matematiğin) diğer tüm tanımları bu iki terim kullanılarak yapılır. Örneğin, eğer x kümesinin her elemanı y kümesinin de bir elemanıysa, x'e y'nin bir altkümesi denir. Bunun gibi matematiğin doğal sayı, gerçel sayı, karmaşık sayı, fonksiyon, türev, süreklilik gibi kavramları kümeler kuramına indirgendiğinde, tanımlanmamış ve hiçbir zaman da tanımlanmayacak olan "küme" ve "elemanı olmak" terimleri kullanılarak tanımlanırlar.

ZFC Aksiyom Sistemi

1. Boşküme Aksiyomu. *Hiç öğesi olmayan bir küme vardır*: $\emptyset$.

2. Eşitlik Aksiyomu. *Aynı öğelere sahip iki küme birbirine eşittir.*

3. Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu. *Eğer φ bir özellikse ve x bir kümeyse, x'in φ özelliğini sağlayan öğelerini öğe olarak içeren ve bunlardan başka öğe içermeyen bir küme vardır*: $\{y \in x : \varphi(y)\}$.

4. Bileşim Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, eleman olarak sadece ve sadece x'in öğelerinin öğelerini içeren bir küme vardır*:

$$\cup x = \cup_{y \in x} y = \{z : \text{ bir } y \in x \text{ için } z \in y\}.$$

5. İki Öğeli Küme Aksiyomu. *Eğer x ve y birer kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır*: $\{x, y\}$.

6. Altkümeler Kümesi Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x'in altkümelerini içeren bir küme vardır*:

$$\begin{aligned} \wp(x) &= \{y : y \subseteq x\} \\ &= \{y : y\text{'nin her elemanı } x\text{'in de elemanıdır}\}. \end{aligned}$$

7. Tümevarımsal Küme Aksiyomu. *Boşkümeyi içeren ve içerdiği her x kümesi için $x \cup \{x\}$ kümesini de içeren (en küçük) bir küme vardır.*

8. Temellendirme Aksiyomu. [**Fraenkel**] *Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'in $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y öğesi vardır.* (Bu aksiyom sadece kümeler kuramında kullanılır.)

9. Yerleştirme Aksiyomu. [**Fraenkel ve Skolem**] *a bir küme ve $\varphi(x, y)$ bir özellik olsun. Her $x \in a$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y kümesi varsa o zaman bir $x \in a$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluştururlar. Yani*

$$\{y : \exists x(x \in a \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğu bir kümedir.

10. Seçim Aksiyomu (C). *Elemanları boş olmayan kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır.*

Bir önceki sayfadaki gri kutucukta ZFC'nin aksiyomlarını bulacaksınız.

3'üncü ve 9'uncu aksiyomlarda "özellik"ten söz ediliyor ama biz "özellik"ten tam neyi kastettiğimizi söylemedik. Özellik'in tam tanımını vermek uzun sürer ve verilen çabaya pek değmez. Birkaç örnekle yetinelim: "Asal sayı olmak", "5 tane elemanı olmak", "Belli bir elemanı içermek" birer özelliktir.

Aksiyomların sayısı sonlu (10 tane) gibi gözükebilir ama bu yanıltıcı: 3'üncü ve 9'uncu aksiyomlar aslında sonsuz sayıda aksiyomdan oluşuyorlar, her biri her φ özelliği için ayrı bir aksiyomu simgeler. Yani 3'üncü ve 9'uncu aksiyomlar aslında birer aksiyom değil, birer aksiyom şemasıdır, her biri aslında sonsuz tane aksiyomdur.

İlk altı aksiyom, son derece doğal aksiyomlar. Bu aksiyomlarda şaşırtıcı bir şey yok. Bu aksiyomları her öğrenci, örneğin kümeleri kesiştirirken ya da bileşimini alırken farkına varmadan kullanır.

7'nci aksiyom olmasa sonsuz bir kümenin varlığını kanıtlayamazdık. Bu aksiyom sonsuz bir kümenin varlığını söylüyor. Nitekim tümevarımsal her küme sonsuz sayıda elemanı olan bir küme olmak zorundadır.

ZFC kümeler kuramında sonsuz sayıda aksiyom vardır. Montague 1961'de bu sistemin sonlu sayıda aksiyoma indirgenemeyeceğini kanıtlamıştır. Gödel, Bernays ve von Neumann'ın bulduğu aksiyom sistemi (NBG) sonludur ve her iki sistemde de kümelerle ilgili aynı sonuçların kanıtlanacağı biliniyor. Ancak NBG siteminde küme olmayan sınıflardan da söz edildiğinden, sonlu olmasına karşın, bir anlamda NBG sistemi ZFC'den daha karmaşıktır diyebiliriz. Bir başka deyişle, ZFC sisteminin dili $\forall$, $\vee$, $=$ gibi standart matematik simgeleri dışında sadece $\in$ simgesini kulanırken, NBG sistemi $\in$ simgesi dışında, küme olmayan topluluklardan sözedebilmek için fazladan bir simge daha kullanmaktadır.

8'inci aksiyom teknik bir aksiyomdur. Sadece kümeler kuramıyla ilgilenenlerin işine yarar. O aksiyom olmasaydı da bugünkü matematik pek değişik olmazdı. Bu yüzden eğer istenirse bu aksiyom listeden çıkarılabilir. Bu aksiyom sayesinde, bir küme kendi kendisinin elemanı olamaz. Ayrıca, gene bu aksiyom sayesinde,

$$x \in y \text{ ve } y \in x$$

özelliklerinin her ikisini de sağlayan x ve y kümeleri olamaz. Ve

$$x \in y,\ y \in z \text{ ve } z \in x$$

özelliklerinin üçünü birden sağlayan x, y ve z kümeleri olamaz.

9'uncu aksiyom az bilinir ama önemlidir. Eğer bu aksiyom olmasaydı,

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}, \ldots\}$$

diye bir kümenin varlığını kanıtlayamazdık mesela.

10'uncu aksiyomun varlığı apayrı bir konudur. Matematikte çok tartışmalara neden olmuş bir aksiyomdur.

Zermelo, sistemin çelişkisiz olduğunu kanıtlamaya çalışmışsa da başaramamıştır. Başaramamasının nedeni vardı: Sistemin çelişkisiz olduğunun kanıtlanamayacağını bugün Gödel sayesinde biliyoruz.

ZFC'nin F'si ise 1922'de Temellendirme ve Yerleştirme aksiyomlarına gereksinildiğinin farkına varan Adolf Fraenkel'in F'sidir. Thoralf Skolem de, Fraenkel'den bağımsız olarak Yerleştirme Aksiyomu'nu aynı yıl keşfetmiştir. İki kişinin birden aynı aksiyomu bulması manidardır elbet, bu, aksiyomun gerçekten gerektiğine ve doğallığına dair bir delildir.

ZFC'nin Z'si yukarıda da dediğimiz gibi Zermelo'nun Z'sidir. Bertrand Russell'dan bağımsız olarak zamanının kümeler kuramında bir çelişki yakalayan Zermelo, çelişkiden kurtulmak için kümeler kuramını aksiyomlaştırma çabasına girişir. Kümeler kuramının aksiyomlarının çoğu ona aittir.

İlk dokuz aksiyoma ZF adı verilir. Sonuncusu da eklenirse, sistem ZFC adını alır. C, "seçim"in İngilizcesi olan "choice" sözcüğünün başharfidir.

Şimdi bu son aksiyoma yakından bakalım.

Seçim Aksiyomu. Son aksiyom (Seçim Aksiyomu ya da kısaca C, bazen AC) diğer aksiyomlardan farklıdır, çünkü (ikincisi dışında) diğer aksiyomlar "yapıcı" nitelikte aksiyomlardır, bir ya da birkaç kümeden yeni bir küme inşa etme yöntemini söylerler. İlk on aksiyomla inşa edilen her küme kullanılan aksiyom tarafından tanımlanmış ve belirlenmiştir; bu aksiyomlarla inşa edilen o kümeden sadece bir tane vardır. (7'nci aksiyom bu dediğimize bir istisna belki ama olsun... Önemsemeyin. 7'nci aksiyomun varlığını söylediği kümenin biricik olmaması bu aksiyomun en önemli niteliği değildir. Bu aksiyomu birazcık değiştirerek, (en küçük) parantezini ekleyerek, tek bir kümenin varlığını söyler hale getirebiliriz.) Oysa Seçim Aksiyomu'nda varlığı söylenen kümenin (daha doğrusu fonksiyonun, ama fonksiyonlar da bir kümedir) nasıl bir şey olduğuna dair bir şey söylenmemektedir. Seçim Aksiyomu sadece bir fonksiyonun varlığından sözetmektedir, fonksiyonun hangi fonksiyon olduğunu söylememektedir. Seçim Aksiyomu'nda varlığı söylenen fonksiyonlardan birkaç tane olabilir, ki genellikle öyledir, ve bu fonksiyonlardan birini göstermek imkânsızdır.

Varlığı Seçim Aksiyomu'yla kanıtlanmak **zorunda** olan fonksiyonlar açık seçik tanımlanamazlar. Bu yüzden Seçim Aksiyomu uygulamada işe yarar bir biçimde, örneğin bilgisayarlarda ya da teknolojide kullanılamaz. Seçim Aksiyomu'nun sadece kuramsal bir önemi vardır.

Hilbert'in teşvikiyle kümeler kuramıyla ilgilenmeye başlayan Zermelo, her kümenin iyisıralanabileceğini[1] kanıtlayarak genç yaşında ünlenmiş, ancak kanıtında herkes tarafından kabul görmeyen Seçim Aksiyomu'nu kullanmıştır (1904). Bugün Seçim Aksiyomu'yla Zermelo'nun bu teoreminin eşdeğer olduğu biliniyor, yani Zermelo, teoremini kanıtlamak için Seçim Aksiyomu'nu kullanmak zorundaydı, başka türlü yapamazdı.

Seçim Aksiyomu Zermelo'dan önce de kullanılmıştı, ancak

[1]Bir kümenin elemanları, kümenin boş olmayan her altkümesinin en küçük bir elemanı olacak biçimde sıralanırsa, o zaman bu kümeye ***iyisıralanabilir*** denir. Örneğin $\mathbb{N}$ iyisıralanabilir ve hatta iyisıralı bir kümedir.

kümeler kuramı henüz aksiyomlaşmadığından ve matematikçilerin de böyle bir sorunu da olmadığından kimse bunun farkına varmamıştı.

Seçim Aksiyomu'nun Değillemesi ($\neg C$). *Elemanları boş olmayan kümeler olduğu halde seçim fonksiyonu olmayan bir küme vardır.*

Bağımsızlık. 1935'te Gödel, eğer ZF çelişkisizse ZFC'nin de çelişkisiz olduğunu kanıtlamıştır.

1963'te Cohen, eğer ZF çelişkisizse, ZF'ye C'nin değillemesi olan ¬**C** önermesi (yani C'nin yanlış olduğu) eklendiğinde de elde edilen kuramın çelişkisiz olduğunu kanıtlamıştır.

Bu teoremleri kanıtlamak hiç de kolay değildir. Böyle bir uğraş bu kitabın amacını kat kat aşar.

Olgu (Gödel ve Cohen). *Eğer* **ZF** *çelişkisizse, hem* (**ZF** + **C**) *hem de* (**ZF** + ¬ **C**) *çelişkisizdir.*

Bundan, C'nin ZF'den bağımsız olduğu sonucu çıkar: Eğer ZF çelişkisizse, ZF'ye C'yi de, değillemesi olan ¬ **C**'yi de eklesek çelişkisiz bir kuram elde ederiz.

Bu aşamada, C'yi mi yoksa ¬ **C**'yi mi aksiyom olarak kabul etmeli gibi artık matematiği aşan felsefi bir problemle karşı karşıyayız. Ne C'yi ne de C'nin değillemesini kabul edip sadece ZF'yle yetinmek de bir seçenektir elbet.

C'yi Kabul Etmeli mi Etmemeli mi? C'yi kabul edersek daha çok teorem kanıtlarız elbet, çünkü kuramımız C'nin kabulüyle daha da zenginleşmiştir, örneğin C'nin kendisi bu teoremlerden biridir. C'nin değillemesini kabul edersek de daha çok teorem elde ederiz ama C'yi kabul ederek daha "olumlu" teoremler elde edilir, çünkü C sonuç olarak bir fonksiyonun varlığını söylüyor; C'nin değillemesi ise böyle bir fonksiyonun her zaman olmayabileceğini söylüyor, üstelik ne zaman olmayacağından hiç sözetmeden...

Eğer sadece olumlu teorem (varlık teoremleri) elde etmek bizi ilgilendiriyorsa, o zaman C'yi kabul etmeliyiz.

Ama C'yi kabul edip etmemek felsefi bir sorun olarak da görülebilir (ve hatta görülmeli). Sonuç olarak matematikle gerçeği anlamaya ve açıklamaya çalışıyoruz. Gerçeğe uymadığını düşündüğümüz bir önermeyi aksiyom olarak kabul etmemeliyiz. Yani C'yi kabul edip etmemek gerçeği nasıl algıladığımızla ve gerçeğin ne olduğuyla ilgili bir sorundur. Gerçek yaşamda (her ne demekse!) C'nin doğru olduğunu düşünüyorsak o zaman C'yi kabul etmeliyiz, yoksa etmemeliyiz.

En iyisi C'nin sonuçlarına bakmak. Eğer C'nin sonuçları kabul edilebilir, beklenen, çok şaşırtmayan sonuçlarsa o zaman C'yi kabul etmeliyiz. Ama eğer C'nin sonuçları tüyleri diken diken eden sonuçlarsa, o zaman C'yi kabul etmemeliyiz.

Seçim aksiyomundan çok "doğal" sonuçlar çıkabildiği gibi hiç de doğal görünmeyen sonuçlar çıkar. Her ikisinden de birer örnek vereceğiz.

"Doğal" Bir Sonuç. X sonsuz bir küme olsun. X'in sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi var mıdır? Yani X'ten öyle x_0, x_1, x_2, x_3, ... elemanları bulabilirmiyiz ki,

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

sayılabilir sonsuzlukta, yani $\mathbb{N}$ ile aralarında $n \mapsto x_n$ gibi bir eşleme olan bir küme olsun?

Seçim Aksiyomu olmadan böyle bir kümenin varlığı kanıtlanamaz. Zorluk şuradadır:

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

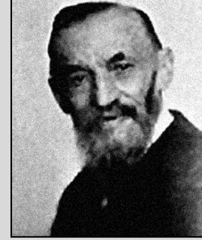
diye X'in sayılabilir sonsuzlukta elemanını içeren bir "nesne" bulabiliriz. Ama bu nesnenin küme olduğunu kümeler kuramının **ZF** aksiyomlarıyla kanıtlamak gerekiyor, oysa Seçim Aksiyomu olmadan bu kanıtlanamaz. Bazı X kümeleri için kanıtlanabilir, ama her sonsuz küme için kanıtlanamaz. Küme olmanın bazı koşulları vardır.

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

nesnesinin bu koşulları yerine getirdiğini kanıtlayamayız.

"Doğal Olmayan" Bir Sonuç. 1 yarıçaplı (içi dolu) bir küre alalım. Şimdi çok şaşırtıcı bir şey söyleyeceğim. Bu küreyi öyle beş parçaya bölebilirim ki ve bu beş parçayı döndürerek ve öteleyerek (yani hacim ve alan değiştirmeyen dönüşümlerden geçirdikten sonra) öyle bir araya getirebilirim ki, parçalardan ikisinden yarıçapı 1 olan bir küme, geri kalan üçünden gene yarıçapı 1 olan bir küme elde edebilirim. Bu saçmasapan görünen teorem Seçim Aksiyomu'yla kanıtlanabilir ancak. Matematikte buna *Banach-Tarski Paradoksu* denir. Ama aslında bir paradoks değildir, sadece şaşırtıcıdır, paradoksa benzer. Beş parçanın hiçbirinin hacmi olamaz elbet, yoksa hacmi büyütemezdik). Seçim aksiyomunun yardımıyla, $\mathbb{R}^3$ uzayının hacmi hesaplanamayan altkümelerini bulabiliriz.

Seçim Aksiyomu ve Peano



Seçim Aksiyomu'ndan tarihte ilk sözeden Peano'dur. Zermelo'dan 14 yıl önce Seçim Aksiyomu'nun farkına varmıştır. 1890'da yazdığı "Démonstration de l'integrabilité des équations différentielles" [Math. Ann. 37 (1890) 182-229] makalesinin 210'uncu sayfasında sonsuz tane seçim yapılamayacağını açıkça yazarak Seçim Aksiyomu'nu kullanmayı reddetmiştir. Daha da ilginci, bundan beş yıl önce 1985'te, "Sull'integrabilità della equazioni differenziali di primo ordine" [Atti Acad. Sci. Torino 21 (1885/86) 677-685] adlı makalesinde hiçbiri boş olmayan $A(n,i) \subseteq \mathbb{R}$ kümelerinden birer eleman seçmek zorunda kaldığında, Peano, çok şaşırtıcı bir biçimde, burada tuhaf bir yöntem uygulamak üzere olduğunu ayrımsamış ve rastgele bir seçimin mümkün olmaması gerektiğini açık ve net bir biçimde söylemiştir:

Rastgele kuralları sonsuz defa kullanarak her sınıftan [*yani kümeden*] *bir eleman seçilemeyeceğinden, burada belirlenmiş bir kuralla her sınıftan bir eleman seçtik.*

Nitekim, $A(n,i)$ kümelerinden her biri kapalı ve üstten sınırlı olduğundan, Peano bu kümelerin maksimal elemanını almıştır ve böylece Seçim Aksiyomu'nu kullanmamıştır.

Süreklilik Hipotezi

Doğal sayıların sayılabilir sonsuzlukta, gerçel sayıların ise sayılamaz sonsuzlukta olduğunu biliyoruz. 1877'de, 32 yaşındayken, kümeler kuramının yaratıcısı Alman matematikçi Georg Cantor, $\mathbb{R}$'nin, doğal sayılardan "daha büyük" ama gerçel sayılardan "daha küçük" bir altkümesinin olup olmayacağı sorusunu sordu. Yani $\mathbb{R}$'nin sayılamaz sonsuzlukta olan ama $\mathbb{R}$ ile eşlenik olmayan bir altkümesi var mıdır? Ya da $\mathbb{R}$'nin her sonsuz altkümesi ya $\mathbb{N}$ ile ya da $\mathbb{R}$ ile eşlenik olmak zorunda mıdır?

Cantor yanıtın olumsuz olacağını tahmin etti ama bir türlü kanıtlayamadı. Cantor'un bu tahminine ***Süreklilik Hipotezi*** denir:

Süreklilik Hipotezi [SH]. $\mathbb{R}$'*nin her sonsuz altkümesi ya* $\mathbb{N}$ *ile ya da* $\mathbb{R}$ *ile eşlenik olmak zorundadır.*

1900'de, Paris'teki meşhur konferansında David Hilbert bu problemi 20'nci yüzyılın matematikçilerine sordu. Hilbert bu probleme o kadar önem veriyordu ki, sunduğu 23 problem arasında bu problem birinci problemdi. Yanıtı bulmak 63 yıl aldı.

Kurt Gödel 1938'de, Süreklilik Hipotezi'nin ZFC'yle tutarlı olduğunu kanıtladı. Yani eğer ZFC çelişkisizse (bir başka deyişle ZFC'de $0 = 1$ eşitliği kanıtlanamazsa), o zaman ZFC'ye Süreklilik Hipotezi'ni eklersek de çelişkisiz bir kümeler kuramı elde ederiz.

Gödel'in bu sonucundan, ZFC'de, Süreklilik Hipotezi'nin yanlışlığının kanıtlanamayacağı çıkar, ama doğruluğunun kanıtlanabileceği çıkmaz.

Gödel ve Süreklilik Hipotezi

Süreklilik Hipotezi, ZFC'den bağımsız olduğu gösterilen ilk önerme değildir. Gödel 1931'de, ZFC'nin çelişkisiz olduğunun kümeler kuramında bir önermeyle ifade edilebileceğini göstermiş, ama bu önermenin (eğer ZFC çelişkisizse) ZFC'den bağımsız olduğunu kanıtlamıştır. 1900'deki konferansında Hilbert, anlaşılır bir iyimserlikle, matematikçilerden matematiğin çelişkisiz olmadığını kanıtlamalarını istemiştir (Hilbert'in ikinci sorusu). Gödel de, ZFC çelişkisizse, ZFC'nin kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamayacağını göstererek Hilbert'in sorusunu olumsuz yanıtlamıştır. ZFC çelişkisizse, ZFC, kendisinin çelişkili olduğunu elbette kanıtlayamayacağından, Gödel'in bulduğu bu önerme ZFC'den bağımsızdır. Ama ne de olsa Gödel'in bulduğu bu önerme sokaktaki matematikçinin ilgilendiği bir önerme değil, öte yandan Süreklilik Hipotezi son derece doğal ve neredeyse günlük yaşama dair bir önermedir.

Gödel, Süreklilik Hipotezi'nin (SH) yanlış olduğunun kanıtlanamayacağını göstermesine karşın gene de SH'nin yanlış olduğunu sanıyordu. Kanıtlanabilmekle doğru olmak iki ayrı kavramdır. Bir önerme, kümeler kuramının bir modelinde (yani kümeler kuramının aksiyomlarının doğru olduğu bir modelde) doğru olabilir ama kanıtlanamayabilir.

Ama ZFC'nin bir modelinin varlığını ZFC kanıtlayamaz, yoksa ZFC kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlardı (çünkü çelişkili kuramların modelleri olamaz elbette).

Bu durumda Gödel'in SH'nin yanlış olduğuna inanması matematiksel olarak bir şey ifade etmez elbette. Gödel'in inanışı tamamıyla felsefiydi. Gödel, Platonist bir görüşe sahip olduğundan, tüm bu kavramların bir yerlerde varolduğunu ve kümeler kuramının bir modelinin bizim algılayamadığımız bir seviyede var olduğuna inanıyordu. Gödel'e göre SH işte o modelde yanlıştır/yanlış olmalıdır.

Gödel'e göre, ZFC'nin SH'yi yanlışlayamamasının nedeni, ZFC'nin yaşadığımız dünyayı/modeli eksik betimlemesinden kaynaklanmaktadır. Yani aslında SH'nin yanlışlığı kanıtlanmalı, ama ne yazık ki ZFC matematiği yeterince iyi betimlemiyor. Dolayısıyla Gödel'e göre SH'yi çürütecek yeni aksiyomlar bulunmalı.

ZFC'nin Süreklilik Hipotezi'ni kanıtlayamayacağını 1963'te Paul Cohen göstermiştir. Cohen'in kanıtı, o güne dek bilinmeyen bir yöntem kullanır: İngilizcesiyle forcing, Türkçesi ***zor kullanma*** ya da ***zorlama*** olabilir. Cohen, zorlamayla yöntemiyle ZFC'nin aksiyomlarıyla SH'nin yanlış olduğu kümeler kuramının bir modelini (ZFC + $\neg$ SH'nin bir modelini) inşa etmiştir ve bu inşasıyla 1966'da matematiğin Nobel'i addedilen Fields Madalyası'nı kazanmıştır.

Gödel'le Cohen'in sonuçlarını bir araya koyarsak, ZFC'nin, Süreklilik Hipotezi'nin doğruluğu ya da yanlışlığı konusunda herhangi bir şey söyleyemeyeceği çıkar. Eğer ZFC çelişkisiz (yani tutarlı) bir kuramsa, ZFC'ye Süreklilik Hipotezi'ni aksiyom olarak eklesek, tam tersine, Süreklilik Hipotezi'nin değillemesini de aksiyom olarak eklesek, her iki durumda da çelişkisiz birer kuram elde ederiz. Mantıkçıların deyimiyle Süreklilik Hipotezi, ZFC'den bağımsızdır.

Yukarıdaki tartışmadan şu sonuç çıkıyor: Matematiksel olarak, Süreklilik Hipotezi'ni kabul etsek de olur, etmesek de. Ya da bu konuda hiçbir karar almayabiliriz. Demek ki bu daha çok gerçeği algılamamızla ilgili felsefi bir sorudur.

Matematiksel olarak yapılabilecek en doğal şey, SH'nin ve değillemesinin sonuçlarına bakıp, çıkan sonuçların "doğallığına" ve "yapaylığına" göre karar vermek. Bu konuda bugüne dek bir fikir birliğine varılamadığından, ne Süreklilik Hipotezi ne de değillemesi aksiyomlara eklenmiştir.

Felsefi olarak düşünüldüğünde, en filozof matematikçiler, SH'nin yanlış olması gerektiğini düşünüyorlar.

SH'nin (ya da SH'nin ZFC'den bağımsızlığının) standart matematikte, daha çok analiz, topoloji ve ölçüm kuramı gibi konularda önemli sonuçları vardır. Bu sayede, bu konulardaki yanıtlanmamış birçok sorunun ZFC'den bağımsız olduğu anlaşılmıştır.

Öte yandan, ZF ve GSH, Seçim Aksiyomu'nu kanıtlayabiliyor. Bunu Polonyalı matematikçi/kümeler kuramcısı Sierpinski kanıtlamıştır.

Cohen ve Süreklilik Hipotezi

Paul Cohen formalist (biçimci) olmasına karşın, o da SH'nin doğru olmaması gerektiğine inanıyordu. Şöyle yazmıştır: "Bu satırların yazarına göre, gün gelecek, SH'nin bariz biçimde yanlış olduğuna karar verilecek. [...] Belki gelecek kuşaklar problemi daha net bir biçimde görüp kendilerini daha iyi ifade edeceklerdir."